حل علم مثلث

تودہنٹر صاحب مطبوعہ مطبع سرکاری

مُحلّلہ

مولوی غلام مصطفےٰ صاحب (مولوی فاضل و زبدۃ الحکماء) پی - ایچ - ای
دویم مدرس ریاضی و لکچرار طب یونانی کالج علوم مشرقی لاہور وممبر
انجمن پنجاب ومصنف کتاب تاریخ متقدمین و شرح جبر مقابلہ و
رسالہ تشریح جسم انسانی وقرابادین مصطفائی وغیرہ

حسب الحکم

جناب معلے القاب ڈاکٹر جی ڈبلیو لیٹنر صاحب بہادر ایل ایل ڈی
بیرسٹرایٹ لا رجسٹرار و بانی مبانی بیت العلوم پنجاب

برائے استفادہ

طلباء پروفشنسی وہائی پروفشنسی کے

مطبع انجمن پنجاب لاہور مین باہتمام کارپردازان مطبع مذکور کی طبع ہوا

سنہ ۱۸۸۲ء

تعداد جلد ۳۰۰

بسم اللہ الرحمن الرحیم

حامداً و مصلیاً

[illegible] کے بعد تمام صاحبان ریاضی دان کے خدمت مین گذارش ہے کہ اس احقر نے حسب الحکم جناب معلی القاب ڈاکٹر جی ڈبلیو لیٹنر صاحب بہادر حل علم مثلث کا تیار کیا - جب وہ جناب فیض مآب بابو نوین چندر رائے صاحب اسسٹنٹ رجسٹرار و سپرنٹنڈنٹ کالج علوم مشرقی لاہور کے ملاحظہ مین آیا تو اونہون نے نہایت رغبت خاطر اور پسندیدگی سے اوسکے چھپنے کا حکم صادر فرمایا - اسلئے بحسب فرمان واجب الاذعان کے یہہ رسالہ [illegible] طبع لایا - لیکن ہر چند مینے اس کتاب کی ترتیب و تحلیل مین محنت اور جانفشانی کی ہے اور [illegible] نہایت عرقریزی اور جفاکشی سے کوشش کی ہے اور چونکہ یہہ ایک بڑا بھاری کام [illegible] نے [illegible] خیرخواہی و ہمدردی دیسی طلباء پنجاب یونیورسٹی کالج کے اپنے دوش پر اوٹھا کر انجام کو پہنچایا [illegible] و حتی المقدور اسکی تصحیح و تنقیح پر اپنے وقتِ گرانمایہ کو صرف کیا ہے مگر پھر بھی احتمال ہے کہ کہین کچھ غلطی باقی رہگئی ہو - اسلئے یہہ ناچیز صاحبانِ اہل تمیز کی خدمت مین ملتجی ہے کہ اگر کہین کوئی سہو و خطا (جو کہ انسان کی سرشت مین بموجب الانسان مرکب من الخطاء والنسیان کے مخلوط ہے) سرزد پاوین تو اوسکو درست فرماکر طبع ثانی کے لئے بندہ کو مرہونِ منت اور مشکور [illegible]ت فرماوین - برکریمان کارہا دشوار نیست ⁘

الملتمس

غلام مصطفی دویم مدرس ریاضی و لکچرار طب یونانی کالج علوم مشرقی لاہور مورخہ

۴ - اکتوبر ۱۸۸۲ء

حل سوالات علم مثلث مستوی نمبر (۱)

س ۱ چونکہ بموجب دفعہ (۸) کے متمم ا = ۹۰ - ا اور یہان

ا = ۱۵ - ۳۴ - ۲۷ ∴ ۹۰ - {۱۵ - ۳۴ - ۲۷} = ۷۴ - ۲۵ - ۳۳ ۵۸ = جواب ہے ؞

پہلے سوال کے دوسری جزء اسطرح ہونی چاہئے یعنی

۴۴ - ۳۴ - ۱۳ = ا جبکہ زاویہ مثبت قرار دیا جاوے

∴ بموجب دفعہ (۸) کے ۹۰ - {۴۴ - ۳۴ - ۱۳} = ۴۵ - ۱۵ - ۲۶ = جواب

اور اصل سوال کا جواب = ۹۰ - (۴۴ - ۱۵ - ۲۹) = (۴۵ - ۱۵ - ۲۵)

اور تیسرے جزو بھی کتاب مین غلط ہے اسطرح ہونی

چاہئے بموجب دفعہ (۸) کے یہان ا = ا - ا - ۲ و ۳

∴ ۹۰ - {ا - ا - ۲ و ۳} = ۸۹ - ۵۸ - ۵۶ = جواب

کتاب ؞

س ۲ چونکہ بموجب دفعہ (۸) کے ضمیمہ ا = ۱۸۰ - ا اور یہان

ا = ۱۴۵ - ۱۵ - ۲۰ ∴ ۱۸۰ - {۱۴۵ - ۱۵ - ۲۰} =

۳۴ - ۴۴ - ۴۰ = جواب ؞

اور دوسرے جزء ا = - {۲ - ۱ - ۲} ∴ بموجب دفعہ

(۸) کے ۱۸۰٫۰۰ — {(۴۶ — ۱۵ — ۲۲)} = ۲۰۶ — ۱۶ — ۲۲ = جواب کے ۔

س۳ چونکہ مثلث کی تین زاویے ملکر مساوی دو قائموں کے ہوتی ہین مگر بوجہ ہونیکے ایک قائمہ ہے تو باقی دو ملکر برابر ایک قائمہ کے ہونگے لیکن اوینن سے ایک = ۹۰ ۔ ۴۰ ۔ ۹ کے تو اسلئے دوسرا مساوی ہوگا ۔ ۹۰ — {۹ — ۴ — ۵} = ۸۰ ۔ ۵ ۔ ۱۵ = جواب ہے

س۴ چونکہ دو عددونکے فرق اور حاصلجمع کے مجموعہ کا نصف مساوی بڑے عدد کے ہوتا ہے اور اونکی حاصلتفریق کا نصف مساوی چہوٹے عدد کے تو اسلئے ۹۰ + (۳۴ — ۲۴ — ۲۴)/۲ = ۱۱۳ — ۳۴/۲ = ۵ ۔ ۱۲ = بڑے زاوے کی اور ۹۰ — (۳۴ — ۲۴ — ۲۴)/۲ = (۵۵ — ۳۶)/۲ = ۲۳ — ۸ = چہوٹے زاوی کے ۔

س۵ چونکہ مثلث متساوی الساقین کے قاعدہ پر زاوئے باہم برابر ہوتے ہین اسلئے دونو زاویونکا مجموعہ ۲ (۵۹ — ۵۹ — ۴) = ۱۱۹ — ۵۹ — ۸ اور چونکہ زاویہ راس باقی دو زاویونکا ضمیمہ ہوتا ہے ∴ زاویہ راس = ۱۸۰ — (۱۱۹ — ۵۹ — ۸) = ۶۰ — ۰ — ۵۲ = جواب ہے

* علامتیں شمار کنندہ مین علامت نفی کی نہین سمجہنی چاہیے بلکہ اوپر خط فاصل ہے

س۶

فرض کرو کہ قاعدہ پر کا زاویہ ۳ د ہے تو زاویہ راس ۴ د ہوگا اور ظاہر ہے کہ زاویہ راس باقی دو زاویون کا ضعیف ہوتا ہے +

∴ ۱۸۰ − ۲ د = ۴ د ∴ ۱۰ د = ۱۸۰ ∴ د = ۱۸ اور ۳ د = ۵۴

اور ۴ د = ۷۲ جو = زاویہ راس کے +

ش۷

اس سوال مین کتاب کی عبارت مین غلطی واقع ہوئی ہے یعنے (سہ چند ہے متمم تیسرے زاویہ سے) ہونی چاہئے +

فرض کرو کہ اب ج ایک مثلث ہے اب ج کی زاویہ راس سے قاعدہ ج ب پر ام عمود ڈالو زاویہ ب ام اور م اج کا نام ر اور و فرض کرو ۔ چونکہ مثلث اب م کا ایک زاویہ قایمہ ہے اور ایک کا نام ر ہے تو اسلیئے دوسریکا نام (ق − ر) ہوگا اور اسیطرح سے مثلث ام ج کی ج زاویہ کا نام (ق − و) اور مثلث اب ج کے زاویہ راس کا (ر + و) ہوگا اور چونکہ ضعیف (ر + و) زاویہ کا مجموعہ باقی دو زاویون کا ہے

∴ دونکو جمع کیا (ق − ر) + (ق − و) = ۲ ق − و − ر = ۱۲۰

اور (ق − ر) + (ق − و) = ۲ ق − و − ر = ۲ ر

یعنے ۲ ق = ۴ و + ر ......(۱)
۲ ق = ۲ ر + و ......(۲) } دوسریکو ۲ مین ضرب دیکر تفریق کی

گول ناپ $\frac{ع\pi}{۱۸۰}$ ہونے ∴ س : $\frac{ع\pi}{۱۸۰}$ :: ۶۰ : π

∴ π س = $\frac{ع\pi}{۳}$ ∴ ۳π س = ع π ∴ ۳ س = ع

پس مساواتین مندرجہ ذیل حاصل ہوئین +

س + ک + ع = ۱۸۰ .... (۱)

۳ س = ع ...... (۲)

۲ک = س + ع ...... (۳)

مساوات ۳ مین ع کی جگہ ۳ س رکھنے سے ۲ک = ۴ س

∴ ک = ۲ س ∴ مساوات (۱) مین س + ۲ س + ۳ س = ۱۸۰

∴ ۶ س = ۱۸۰ ∴ س = °۳۰ اور ک = °۶۰ اور ع = °۹۰ پس ہر سہ زاویہ

= °۳۰ و °۶۰ و °۹۰ +

س ۶

چونکہ $\frac{\text{لنبائی قوس}}{\text{نصف قطر}}$ = گول ناپ زاویہ مرکزی ∴ $\frac{\text{لنبائی قوس}}{۹}$ = گول ناپ زاویہ ایک درجہ کے ∴ لنبائی قوس = ۹ × گول ناپ زاویہ ایک درجہ

= ۹ × $\frac{\pi}{۱۸۰}$ = $\frac{۹\pi}{۱۸۰}$ = $\frac{\pi}{۲۰}$ = $\frac{۳٫۱۴۱۵۹}{۲۰}$ = ۰٫۱۵۷ انچ = جواب

طرز دیگر

اس سوال اگر نصف قطر کسی دایرہ کا ک ہو تو اوسکا محیط ۲ π ک ہوگا

بموجب دفعہ ۲ کے اسمین محیط اسکا ۲ × π ہوگا یعنے ۱۸ × π لیکن

π = ۳٫۱۴۱۵ اسلئے ۱۸ × ۳٫۱۴۱۵۹ وغیرہ = ۵۶٫۵۴۸۶۲ وغیرہ
یعنے اسقدر اسکا محیط ہوگا لیکن ہمنے ایک درجے کی لمبائی
معلوم کرنی ہے اسلئے اسکو ۳۶۰ پر تقسیم کیا تو مساوی جز۶
کے ہوگا $\frac{۵۶٫۵۴۸۶۲}{۳۶۰}$ = ۰٫۱۵۷ وغیرہ انچ +

س ۷
∴ ۲½ گز = ۲½ × ۳ = $\frac{۳ × ۵}{۲}$ = $\frac{۱۵}{۲}$ فٹ ∴ گول ناپ انزاویہ
مرکزی کی جو ۴۰ فٹ کی قوس کے مقابل ہے $\frac{۴۰}{\frac{۱۵}{۲}}$ = $\frac{۸۰}{۱۵}$ = $\frac{۱۶}{۳}$
= ۵⅓ = جواب جزو اوّل +
اور گول ناپ ۴۰ درجہ = ۴۰ × $\frac{π}{۱۸۰}$ = $\frac{۲}{۹}$ π جواب جزو دوم

س ۸
اس سوال مین تنہ سے مراد لپیٹ ہے یعنے محیط دایرہ اور موٹائی
سے مراد قطر ہے یعنی اوسکا محیط معلوم ہے صرف قطر اوسکا دریافت
کرنا ہے +
۳۶ × ۴ فٹ = ۱۴۴ درخت کی موٹائی = $\frac{۱۸}{π}$ = $\frac{۱۸}{۳٫۱۴۱۵۹}$ = تقریباً
۵٫۷۰۹ فیٹ تقریباً ۵ فٹ ۹ انچ = جواب +

س ۹
یعنے زمین کا محیط ۲۵۰۰۰ میل ہے تو بتاؤ کہ اوسکا قطر کتنا ہے
اسلئے قطر = $\frac{۲۵۰۰۰}{π}$ = $\frac{۲۵۰۰۰}{۳٫۱۴۱۵۹}$ = تقریباً ۷۹۵۸ میل = جواب

س ۱۰
بموجب شرائط سوال کے اسکے معنے یہہ ہین اگر زمین کی حرکت محوری کے
باعث سے کوئی مقام خط استواء کا ۲۴ گھنٹہ مین ۲۵۰۰۰ میل طے کریگا

تو ایک دقیقہ مین کسقدر مطے کریگا اسلئے تناسب ہے چونکہ ۲۴ × ۲ × ۶۰ =

۲۴۴۰ منٹ کے ۲۴۴۰ : ۱ :: ۵۰۰ : ۲ مدمطے مدمطے یعنی د = $\frac{۵۰۰}{۲۴۴۰} = \frac{۲۵}{۱۲۲}$ =

$\frac{۱۳}{۳۸}$ — ۰.۲۰۴

حل سوالات نمبر (۳)

س ۱

فرض کرو کہ زاویہ معین ا ہے تو جم ا = $\sqrt{۱ - جب^۲ ا}$ بموجب دفعہ ۲۹

= $\sqrt{۱ - (\frac{۳}{۵})^۲}$ = $\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}}$ =

$\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$

اور مس ا = $\frac{جب ا}{جم ا} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۳}{۴}$ اور ظم ا = $\frac{جم ا}{جب ا}$ =

$\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۴}{۳}$ اور قع ا = $\frac{۱}{جم ا} = \frac{۱}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۵}{۴}$ اور مق ا =

$\frac{۱}{جب ا} = \frac{۱}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۵}{۳}$ اور جق ا = ۱ - جب ا = ۱ - $\frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵}$ اور جمق ا =

۱ - جم ا = ۱ - $\frac{۴}{۵} = \frac{۱}{۵}$ +

س ۲

فرض کرو کہ زاویہ معین ا ہو چونکہ جب ا = $\frac{مس ا}{\sqrt{۱ + مس^۲ ا}}$ بموجب دفعہ ۳۱

∴ جب ا = $\frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{۱ + (\frac{۳}{۴})^۲}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}} = \frac{۳}{۵}$ +

اور جم ا = $\frac{جب ا}{مس ا} = \frac{\frac{۳}{۵}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۵}$ +

اور قع ا = $\frac{۱}{جم ا} = \frac{۱}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۵}{۴}$ اور مق ا = $\frac{۱}{جب ا} = \frac{۱}{\frac{۳}{۵}} = \frac{۵}{۳}$ اور

جق ا = ۱ - جب ا = $(۱ - \frac{۳}{۵}) = \frac{۲}{۵}$ +

= ۱ – ۱ = فہو المطلوب +

مساوا اتھائے ذیل کو دریافت کرو

س ۶

+ جب $\frac{\theta}{2}$ = $\frac{3}{2}$ جم چونکہ بموجب دفعہ ۹ ۲ جب = ۱ – جم ۲

∴ ۱ – جم ۲ = $\frac{3}{2}$ جم ∴ جم ۲ + $\frac{3}{2}$ جم = ۱ تکمیل مجذور سے

جم ۲ + $\frac{3}{2}$ جم + $\frac{9}{16}$ = $\frac{25}{16}$ جذر لیا +

تو جم + $\frac{3}{4}$ = ± $\frac{5}{4}$ ∴ جم = $\frac{1}{2}$

چونکہ جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ۶۰° مگر ایک درجہ کی گول ناپ =

$\frac{\pi}{180}$ ∴ ۶۰° = $\frac{\pi \cdot 60}{180}$ = $\frac{\pi}{3}$ = جواب +

س ۷

جب θ + جم θ = ۱ ∴ جم θ = √۱ – جب θ۲

∴ √۱ – جب ۲ = ۱ – جب طرفین کا مال لیا تو

۱ – جب ۲ = ۱ + جب ۲ – ۲ جب θ عمل انتقال سے

۲ جب θ ۲ – ۲ جب = ۰ ∴ ۲ جب ۲ = ۲ جب

∴ جب = ۰ یا اگر صفر یا ۱ جب مستوی کے صفر درجہ یا ۹۰°

کی ہے ∴ θ = ۰ × $\frac{\pi}{180}$ = ۰ یا θ = $\frac{\pi}{180}$ × ۹۰ = $\frac{\pi}{2}$

یعنی جواب = ۰ یا $\frac{\pi}{2}$ +

س ۸

مم θ = ۲ جم θ لیکن بموجب دفعہ ۱۲ مم θ = $\frac{\text{جم } \theta}{\text{جب } \theta}$

∴ جم ۵ / جب ۵ = ۲ جم ۵ حاصل لیا تو

جم ۲ / جب ۲ = ۴ جم ۲ اخراج کسر سے

جم ۲ = ۴ جم ۲ جب² ۲ لیکن جب² ۲ = ۱ − جم² ۲

∴ جم ۲ = ۴ جم ۲ (۱ − جم² ۲) طرفین کو جم ۲ پر تقسیم کیا تو

۱ = ۴ − ۴ جم² ۲ ∴ ۴ جم² ۲ = ۳ ∴ جم² ۲ = ۳/۴ طرفین کا جذر لیا تو

جم θ = ±√۳/۲ لیکن جم √۳/۲ = ۰.۸۶۶ ∴ θ = ۳۰° مگر گول ناپ میں

= ۳۰ × π/۱۸۰ = π/۶ یا جم θ = ۰ ∴ θ = ۹۰° = ۹۰ × π/۱۸۰ = π/۲

س ۹

جب² θ − ۲ جم θ + ۱/۴ = ۰

یعنی ۱ − جم² θ − ۲ جم θ + ۱/۴ = ۰ ∴ جم² θ + ۲ جم θ − ۵/۴

مساوات بالا کو درجہ دویم کے ذریعہ سے حل کیا

تو جم θ = ± ۳/۲ − ۱ = ۱/۲

∴ θ = ۶۰° = ۶۰ × π/۱۸۰ = π/۳

س ۱۰

۳ قع⁴ θ + ۸ = ۱۰ قع² θ عکس انتقال سے

۳ قع⁴ θ − ۱۰ قع² θ + ۸ = ۰ ∴ قع⁴ − ۱۰/۳ قع² = −۸/۳ حل کیا مساوات کو

تو قع θ = √۲ ∴ θ = ۴۵° = ۴۵ × π/۱۸۰ = π/۴

یا قع θ = ۲/√۳ لیکن قع ۲/√۳ = ۳۰°

∴ ہ = ۰۶۰ گول ناپ = $\frac{\pi \times 30}{180}$ = $\frac{\pi}{6}$ = جواب دوم کے +

س ۱۱ معلوم ہے کہ جب (ا - ب) = ½ × ٹگر جیب مستوی ۰۳۰ درجہ کی ہوتی ہے ∴ ا - ب = ۰۳۰ اور جم (ا + ب) = ½ ٹگر جم ۰۶۰ درجہ کی ہوتی ہے ∴ ا + ب = ۰۶۰ اب دو نو مساواتون کو جمع کیا تو ۲ ا = ۰۹۰ ∴ ا = ۰۴۵ اور تفریق کیا تو ۲ ب = ۰۳۰ ∴ ب = ۰۱۵ +

حل سوالات نمبر ۴

س ۱ ۵۸۵ - ۰۶۰ ۳ = ۵ ۲۲ پس جو نسبتین ۲۲۵ کی ہو نگی وہی ۵۸۵ کی ہونگی +

س ۲ چونکہ تقسیم مختصر قاعدہ تفریق کا ہے اسواسطے ۰۹۶۰ کو ۰۳۶۰ پر تقسیم کیا جو باقی رہا اوسکی نسبتین موافق ۰۹۶۰ کے نسبتو نکے ہونگی علیٰ ہذا القیاس ۳ و ۴ سوال +

س ۳ مس ۴۵ = ا اور مس ۴۵ = مس (۱۸۰ + ۴۵) = مس ۲۲۵ اور ۲۲۵ = مس (۱۸۰ + ۲۲۵) = مس ۴۰۵ عددًا اور مس ۴۰۵ = مس (۱۸۰ + ۴۰۵) = مس ۵۸۵ عددًا علیٰ ہذا القیاس ۱۸۰ درجہ جمع کرتے جاؤ جبتک کہ ۰۹۰ سے کم رہین اون سب کے

مس برابر ایک کے رہیگی +

س ۶ جم^2 = $\frac{1}{2}$ ∴ جم = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور جم^2 = ۱ - جب^2 پس جب^2 = $\frac{1}{2}$ یعنی جب = $\frac{1}{\sqrt{2}}$
اور جم یا جب ۴۵° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ پس پہلا زاویہ ۴۵° اور چونکہ جم (۹۰ + ۴۵)
= - جم ۴۵° پس دوسرا زاویہ ۱۳۵° علی ہذا القیاس ۹۰ کو جمع کرتے جاؤ
جب تک کہ ۳۶۰ سے کم رہیں +

س ۷ جمق $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ اول فرض کرو کہ ن = ۰ پس ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ =
۱ - جم ۰° = ۱ - ۱ = ۰ پہر فرض کرو کہ ن = ۱ تو ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ - جم $\frac{\pi}{4}$ =
۱ - جم ۴۵° لیکن جم ۴۵ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ پس ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ پہر فرض کرو
کہ ن = ۲ تو ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ - جم $\frac{2\pi}{4}$ = ۱ - جم ۹۰° لیکن جم ۹۰° =
پس = ۱ کے پہر فرض کرو کہ ن = ۳ کی ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ - جم $\frac{3\pi}{4}$ =
۱ - جم ۱۳۵° لیکن جم ۱۳۵ = - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ پس ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$
چہارم فرض کرو کہ ن = ۴ ۱ - جم $\frac{ن\pi}{4}$ = ۱ - جم ۱۸۰° لیکن جم ۱۸۰ =

س ۸ ۱ - (-۱) = ۲ اول فرض کرو کہ ن = ۰ کی جب $\left\{\frac{ن\pi}{2} + (-1)^ن \frac{\pi}{6}\right\}$
= جب $\left\{0 + 1 \times \frac{\pi}{6}\right\}$ = جب $\frac{\pi}{6}$ = جب ۳۰° = $\frac{1}{2}$ پہر فرض کرو
کہ ن = ۱ کی جب $\left\{\frac{ن\pi}{2} + (-1)^ن \frac{\pi}{6}\right\}$ جب $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ =
جب $\frac{3\pi - \pi}{6}$ = جب $\frac{\pi}{3}$ = جب ۶۰° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ پہر فرض کرو
کہ ن = ۲ تو جب $\left\{\frac{ن\pi}{2} + (-1)^ن \frac{\pi}{6}\right\}$ = جب $\left\{\frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right\}$

حل سوالات نمبر ۵

س ۱ مس θ = ۱ چونکہ مس ۴۵° = ۱ ∴ θ = ۴۵° اسکی عام صورت یہ ہے
ن π + ۴۵π/۱۸۰ = ن π + π/۴ = جواب ہے +

س ۲ جب θ = ۱ لیکن جب ۹۰° = ۱ ∴ θ = ۹۰° اسکی عام صورت یہ ہے
۲ن π + π/۲ یعنی اون زاویون کے ۲ن π شامل
کرنے سے بنتی ہین ∴ جواب = (۲ن + ۱/۲) π +

س ۳ جم θ = ۱ لیکن جم ۰ = ۱ ∴ θ = ۰ عام صورت یہ ہے ۲ن π + ۰ =
۲ن π یعنی اول +

س ۴ جم θ = −۱/۲ لیکن جم ۱۲۰° = −۱/۲ ∴ اسکی عام صورت ۲ن π ± ۲π/۳
ہو سکی +

س ۵ جب² θ = جب² ا جذر لیا تو جب θ = جب ا اسلئے جن زاویوں کے
جب (ا) زاویہ کی جب کے برابر ہوگی اونکی جب θ زاویہ کی جب
کے بھی مساوی ہوگی +

س ۶ مق² θ = ۴/۳ جذر لیا تو مق θ = ۲/√۳ لیکن ۲/√۳ = مق ۶۰° پس
θ = ۶۰° چونکہ عام صورت مق کی وہی ہے جو عام صورت جب کی
ہے اور عام صورت جب کی ن π ± ا ہے پس جواب = ن π ± ۶۰π/۱۸۰

= ن ط ± ط/۲ +

س ۷ جم ۲ ہ = جم ۲ ا جذر لیا تو جم ہ = جم ا یعنی ہ کی جم کی وہی قیمت ہوگے جو ا کی جم کی قیمت ہو خواہ مثبت ہو خواہ منفی اور ا کی جم کی قیمت وہی ہوگی جو ا کے ساتھ ۰، ا یا ۲، ۳ یا وغیرہ یعنے ن ط ملانے سے یا فرق کرنے سے بنتے ہین ∴ جواب = ن ط ± ا +

س ۸ قع ۲ ہ = ۲ جذر لیا تو قع ہ = ± ۲ لیکن قع ہ ط/۴ = ۲ اور قع کی عام صورت ن ط ± ط/۴ +

س ۹ مس ۲ ہ = مس ۲ ا جذر لیا تو مس ہ = ± مس ا ∴ ± مس ا کی وہی قیمت ہوگی جو مس ن ط ± ا ہوگی +

س ۱۰ مس ۲ ہ = ۱/۳ ∴ مس ہ = ± ۱/√۳ لیکن مس ط/۶ = ۱/√۳ ∴ عام صورت ن ط ± ط/۶ +

س ۱۱ حسب دفعہ ۳۹ آلات مثلثی کسی زاویہ کے خواہ وہ زاویہ مثبت ہو خواہ منفی ہمیشہ چار قایمہ یا کسی ضعف چار قایمہ کی ادس زاویہ مین شامل کرنے سے نہین بدلتی اسلئے جب اور جم ۲ ن ط + ا کے وہی ہونگین جو جب اور جم ا کی ہین اور سوا اسکے اور کوئی زاویہ ایسا نہین ہوسکتا جسکی جب اور جم مثل ا کے جب اور جم کے ہو +

س ۱۲ چونکہ جب اور جم دونون تیسری ربع مین منفی ہوتے ہین پس معلوم ہوا کہ ہ زاویہ تیسری ربع مین ہے اور وہ زاویہ جسکی جب = $-\frac{1}{2}$ اور جم = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ کے ہو ۲۱۰° کا ہے پس ہ = ۲۱۰° = $\frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ عام صورت = ۲ن π + $\frac{7\pi}{6}$ کیونکہ بموجب دفعہ ۹۳ آلات مثلثی کسی زاویہ کے خواہ مثبت خواہ منفی بچار قائمی یا چار قائمی کی کسی منعف کے ملانے سے متغیر نہین ہوتی +

حل سوالات نمبر ۶

س ۱ $\frac{\text{جم ا + جب ا}}{\text{جم ا - جب ا}}$ = مس ۲ا + قم ۲ا کسر اور مخرج کو شمار کنندہ مین ضرب کیا ∴ $\frac{(\text{جم ا + جب ا})^2}{\text{جم}^2\text{ا - جب}^2\text{ا}} = \frac{\text{۱ + ۲ جم ا جب ا}}{\text{۲ جم}^2\text{ا - ۱}}$ بموجب دفعہ ۱ = $\frac{\text{۱ + جب ۲ا}}{\text{جم ۲ا}}$

= $\frac{\text{جب ۲ا}}{\text{جم ۲ا}} + \frac{1}{\text{جم ۲ا}}$ = مس ۲ا + قم ۲ا +

س ۲ ۲ جب² ا جب² ب + ۲ جم² ا جم² ب = ۱ + جم ۲ا جم ۲ب بموجب دفعہ ۱ = (۱ - جم ۲ا) ($\frac{\text{۱ - جم ۲ب}}{2}$) + (۱ + جم ۲ا) ($\frac{\text{۱ + جم ۲ب}}{2}$)

= $\frac{\text{۲ + ۲ جم ۲ا جم ۲ب}}{2}$ = ۱ + جم ۲ا جم ۲ب +

س ۳ مس (۴۵° + ا) - مس (۴۵° - ا) = ۲ مس ۲ا

= بموجب دفعہ ۴۳، $\frac{\text{۱ + مس ا}}{\text{۱ - مس ا}} - \frac{\text{۱ - مس ا}}{\text{۱ + مس ا}}$

= $\frac{(\text{۱ + مس ا})^2 - (\text{۱ - مس ا})^2}{\text{۱ - مس}^2\text{ا}}$

اور ۲ جب۲ ا = ۱ - جم ۲ ا

= (۲ جب ا جم ا) جم ب + جم ۲ ا جب ب - (۲ جب ا جم ا) جم ب + (۱ - جم ۲ ا) جب ب / جب ا

= جب ب / جب ا ❊

س ۸

جب ۴ ا = ۴ جب ا جم۳ ا - ۴ جم ا جب۳ ا

جب ۴ ا = جب (۳ ا + ا) = جب ۳ ا جم ا + جم ۳ ا جب ا

بموجب دفعہ ۸۰ ❊

(۳ جب ا - ۴ جب۳ ا) جم ا + (۴ جم۳ ا - ۳ جم ا) جب ا

= ۴ جب ا جم۳ ا - ۴ جم ا جب۳ ا ❊

س ۹

جم ا - جم ۳ ا / جب ۳ ا - جب ا = مس ۲ ا بموجب دفعہ ۱، جملہ اولی =

۲ جب (۳ ا + ا)/۲ جب (۳ ا - ا)/۲ / ۲ جم (۳ ا + ا)/۲ جب (۳ ا - ا)/۲ = ۲ جب ۲ ا × جب ا / ۲ جم ۲ ا × جب ا

= مس ۲ ا ❊

س ۱۰

جم ۲ ا - جم ۴ ا / جب ۴ ا - جب ۲ ا = مس ۳ ا بموجب دفعہ ۲، جملہ اولے =

۲ جب (۲ ا + ۴ ا)/۲ جب (۴ ا - ۲ ا)/۲ / ۲ جم (۲ ا + ۴ ا)/۲ جب (۴ ا - ۲ ا)/۲ = ۲ جب ۳ ا جب ا / ۲ جم ۳ ا جب ا

= جب ۳ ا / جم ۳ ا = مس ۳ ا ❊

س ۱۱

مق ۲ ا + مم ۴ ا = مم ا - مق ۴ ا

= ۱ / جب ۲ ا + جم ۴ ا / جب ۴ ا لیکن جزو ثانی = جم (۲ ا + ۲ ا) / جب (۲ ا + ۲ ا) = جم۲ ۲ ا - جب۲ ۲ ا / ۲ جب ۲ ا جم ۲ ا

= جم۲ ۲ ا - (۱ - جم۲ ۲ ا) / ۲ جب ۲ ا جم ۲ ا = ۲ جم۲ ۲ ا - ۱ / ۲ جب ۲ ا جم ۲ ا ، اسکو پہلے جزو کے سات

= جب ۲ ا (جم ا - جب ا) + جب ۲ ا (جم ا جب ا) + (جم ا - جب ا)

جملہ (جم ا - جب ا) کے سر کو جمع کرکے اسمین ضرب دینا چاہئے ∴

= (ا + ۲ جب ۲ ا) (جم ا - جب ا) اسکے بعد یہی عمل نسب نما پر کیا جاوے

تو اسیطور پر اوسکا حاصل یہی ہوگا لیکن علامت مختلف ہونگے

یعنے اسطور پر (ا - ۲ جب ۲ ا) (جم ا + جب ا) ∴

یعنے دونون سے یہہ حاصل ہوگا $\frac{\text{ا + ۲ جب ۲ ا}}{\text{ا - ۲ جب ۲ ا}}$ × $\frac{\text{جب ا - جم ا}}{\text{جب ا + جم ا}}$

لیکن اخیر کی جزو مساوی مس (ا - ۴۵°) کیونکہ مس (ا - ۴۵°)

کا = $\frac{\text{مس ا - ا}}{\text{مس ا + ا}}$ = $\frac{\frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}} - \text{ا}}{\text{ا} + \frac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}}$ = $\frac{\text{جب ا - جم ا}}{\text{جب ا + جم ا}}$

∴ رقم بالا = $\frac{\text{ا + ۲ جب ۲ ا}}{\text{ا - ۲ جب ۲ ا}}$ × مس (ا - ۴۵°) ∴ اگر اسے ضرب دیں تو برابر ہوگی

س ۱۸

جم ا + جم (۱۲۰° - ا) + جم (۱۲۰° + ا) = ∴ بموجب دفعہ ۲

∴ جم ا + جم (۱۲۰° - ا) + جم (۱۲۰° + ا) = جم ا + ۲ جم ۱۲۰° جم ا

= جم ا + ۲ × $-\frac{1}{2}$ × جم ا کیونکہ جم ۱۲۰° = $-\frac{1}{2}$

∴ جم ا - جم ا = ۰

س ۱۹

۴ جب ا جب (۶۰° - ا) جب (۶۰° + ا) = جب ۳ ا

= ۴ جب ا (جب ۶۰° جم ا - جم ۶۰° جب ا) (جب ۶۰° جم ا + جم ۶۰° جب ا)

= ۴ جب ا (جب^2 ۶۰° جم^2 ا - جم^2 ۶۰° جب^2 ا) لیکن جب ۶۰° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور

جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ ∴

∴ ۴ جب ا (۳/۴ × جم² ا − ۱/۴ × جب² ا) = ۴ جب ا {۳/۴ (ا − جب² ا)

− ۱/۴ جب² ا} ۰

= ۴ جب ا (۳/۴ − ۳/۴ جب² ا − ۱/۴ جب² ا)

= ۴ جب ا (۳/۴ − جب² ا) = ۳ جب ا − ۴ جب³ ا لیکن یہہ

بموجب دفعہ ۸۰ = جب ۳ ا ۰

سن ۲۰

۴ جم ا جم (۶۰ − ا) جم (۶۰ + ا) = جم ۳ ا ۰

جملہ اوسے ۰

= ۴ جم ا (جم ۶۰ جم ا + جب ۶۰ جب ا) (جم ۶۰ جم ا − جب ۶۰ جب ا)

= ۴ جم ا (جم² ۶۰ جم² ا − جب² ۶۰ جب² ا) لیکن جم ۶۰ = ۱/۲ اور جب ۶۰

= √۳/۲

تو ۴ جم ا (۱/۴ جم² ا − ۳/۴ جب² ا) = ۴ جم ا {۱/۴ جم² ا − ۳/۴ (ا − جم² ا)}

= ۴ جم ا (۱/۴ جم² ا − ۳/۴ + ۳/۴ جم² ا) = ۴ جم ا (جم² ا − ۳/۴)

= ۴ جم³ ا − ۳ جم ا لیکن یہہ بموجب دفعہ ۸۰ = جم ۳ ا ۰

سل ۲۱

جب ۳ ا جب³ ا + جم ۳ ا جم³ ا = جم³ ۲ ا جملہ اول بموجب دفعہ ۸۰

= (۳ جب ا − ۴ جب³ ا) جب³ ا + (۴ جم³ ا − ۳ جم ا) جم³ ا

= ۳ جب⁴ ا − ۳ جب⁶ ا − جب⁶ ا + ۳ جم⁶ ا + جم⁶ ا − ۳ جم⁴ ا

= ۳ جب⁴ ا − ۳ جب² ا × جب² ا جب⁴ ا + ۳ جم ا × جم² ا + جم⁶ ا جم

اور دوسری رقم = − جم^۲ ن ا جم ا − جب^۲ ن ا جب^۲ ا + ۲ جم ن ا جم ا جب ن ا جب ا + جب^۲ ا جب^۲ ا − (ا − جب^۲ ن ا) جب^۲ ا − جب^۲ ن ا جب^۲ ا = یعنے جب^۲ ا جب^۲ ا + جب^۲ ن ا جب^۲ ا − جب^۲ ن ا جب^۲ ا =

یہی مطلوب تہا +

س ۲۴

$$\frac{جب\ ا \mp جب\ ن\ ا + جب\ (۲ن - ۱)\ ا}{جم\ ا \mp جم\ ن\ ا + جم\ (۲ن - ۱)\ ا} = سس\ ن\ ا\ مجموعہ$$

دفعہ ۲۰ کے رقم اول وسیوم کو جمع کیا +

$$= \frac{۲\ جب\ \frac{(۲ن-۱)\ ا + ا}{۲}\ جم\ \frac{(۲ن-۱)\ ا - ا}{۲} \mp جب\ ن\ ا}{۲\ جم\ \frac{(۲ن-۱)\ ا + ا}{۲}\ جم\ \frac{(۲ن-۱)\ ا - ا}{۲} \mp جم\ ن\ ا}$$

$$= \frac{۲\ جب\ ن\ ا\ جم\ (ن-۱)\ ا \mp جب\ ن\ ا}{۲\ جم\ ن\ ا\ جم\ (ن-۱)\ ا \mp جم\ ن\ ا} = \frac{جب\ ن\ ا\ \{۲\ جم\ (ن-۱)\ ا \mp ۱\}}{جم\ ن\ ا\ \{۲\ جم\ (ن-۱)\ ا \mp ۱\}}$$

= سس ن ا +

س ۲۵

جب ن ا سق^۲ ا قع ا − جم ن ا قع^۲ ا سق ا = ۴ جب (ن − ۱) ا سق^۲ ۲ ا

$$= \frac{جب\ ن\ ا}{جب^۲\ ا\ جم\ ا} - \frac{جم\ ن\ ا}{جم^۲\ ا\ جب\ ا}$$ اخراج کسر سے

$$= \frac{جب\ ن\ ا\ جم\ ا\ جب\ ا - جم\ ن\ ا\ جب\ ا\ جم\ ا}{جب^۲\ ا\ جم^۲\ ا\ جب\ ا\ جم\ ا}$$

$$= \frac{جم\ ا\ جب\ ا\ (جب\ ن\ ا\ جم\ ا - جم\ ن\ ا\ جب\ ا)}{جم\ ا\ جب\ ا\ (جب^۲\ ا\ جم^۲\ ا)}$$ شمارکنندہ اور نسب نما

دونوںکو ۴ مین ضرب کیا +

= ۴ جب (ن - ۱) ۱ / ۴ جب۲ ۱ جم۲ ۱ لیکن نسب نما = ۴ جب۲ ۱ جم ۱

= (۲ جب ۱ جم ۱)۲ بموجب دفعہ ۱

= (جب ۲ ۱)۲ = جب۲ ۲ ۱

∴ ۴ جب (ن - ۱) ۱ × ۱ / جب۲ ۲ ۱

= ۴ جب (ن - ۱) ۱ مق۲ ۲ ۱

س ۲۶

جم ۱۰ ۱ + جم ۱۸ + ۳ جم ۴ ۱ + ۳ جم ۱۲ = ۱ جم ۱ جم۳ ۱۳

بموجب دفعہ ۲، جملہ اولے =

۲ جم ۹ ۱ جم ۱ + ۲ جم ۱۳ جم ۱ = ۲ جم ۱ (جم ۹ ۱ + ۳ جم ۳ ۱)

= ۲ جم ۱ (جم ۹ ۱ + جم ۳ ۱ + ۲ جم ۳ ۱)

= ۲ جم ۱ (۲ جم ۶ ۱ جم ۳ ۱ + ۲ جم ۳ ۱) دفعہ ۲

= ۲ جم ۱ × ۲ جم ۳ ۱ (جم ۶ ۱ + ۱) لیکن بموجب دفعہ ۱، کے

= ۴ جم ۱ × جم ۳ ۱ (۲ جم۲ ۳ ۱)

= ۸ جم ۱ جم۳ ۳ ۱

س ۲۷

مم ۱ + مم ۲ ۱ + مم ۴ ۱ = مق ۴ ۱ (۲ + ۲ جم ۲ ۱ + ۳ جم ۲ ۱)

جملہ اولے

= جم ۱ / جب ۱ + جم ۲ ۱ / جب ۲ ۱ + جم ۴ ۱ / جب ۴ ۱ لیکن جب ۴ ۱

= ۴ جب ۲ ۱ جم ۲ ۱ اور یہ مساوی ہے

یہی مطلوب تھا

مش ۳

جم^۶ ا − جب^۶ ا = جم ۲ا (۱ − ۱/۴ جب^۲ ۲ا) جملہ اوسے

= (جم^۲ ا − جب^۲ ا) (جم^۴ ا + جم^۲ ا جب^۲ ا + جب^۴ ا) =

= جم ۲ا {جم^۴ ا + (۱ − جب^۲ ا) جب^۲ ا + جب^۴ ا}

= جم ۲ا (جم^۴ ا + جب^۲ ا) = جم ۲ا (جم^۲ ا × جم^۲ ا + جب^۲ ا)

= جم ۲ا {(۱ − جب^۲ ا) جم^۲ ا + جب^۲ ا}

= جم ۲ا (جم^۲ ا + جب^۲ ا − جب^۲ ا جم^۲ ا) +

= جم ۲ا (۱ − جب^۲ ا جم^۲ ا) لیکن جب^۲ ا جم^۲ ا کو ۴/۴ سے ضرب کیا تو

تو جم ۲ا (۱ − ۴ جب^۲ ا جم^۲ ا / ۴) = جم ۲ا (۱ − جب^۲ ۲ا / ۴)

= جم ۲ا (۱ − ۱/۴ جب^۲ ۲ا)

مساوات ہائے ذیل کو حل کرو

س ١٣ مس $(\frac{\pi}{4} - \theta)$ + مم $(\frac{\pi}{4} - \theta) = ۴ = \frac{\text{جب}(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\text{جم}(\frac{\pi}{4}-\theta)} + \frac{\text{جم}(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\text{جب}(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

= ۴ اخراج کسر سے جب$^2 (\frac{\pi}{4} - \theta)$ + جم$^2 (\frac{\pi}{4} - \theta)$ =

۴ جب $(\frac{\pi}{4} - \theta)$ جم $(\frac{\pi}{4} - \theta)$ اس لئے ۱ = ۲ جب $(\frac{\pi}{2} - ۲\theta)$ =

۲ جم ۲θ ∴ جم ۲θ = $\frac{1}{2}$ ∴ ۲θ = ۲$n\pi \mp \frac{\pi}{3}$ ∴ $\theta = n\pi \mp \frac{\pi}{6}$

بطرز دیگر۔ مس $(\frac{\pi}{4} - \theta)$ + مم $(\frac{\pi}{4} - \theta)$ = ۴ بموجب دفعہ ۴۰ ،

$\frac{۱ - \text{مس}\,\theta}{۱ + \text{مس}\,\theta} + \frac{۱ + \text{مس}\,\theta}{۱ - \text{مس}\,\theta} = ۴$ یعنی $\frac{(۱ - \text{مس}\,\theta)^2 + (۱ + \text{مس}\,\theta)^2}{(۱ - \text{مس}\,\theta)(۱ + \text{مس}\,\theta)}$

= ۴

∴ $\frac{۲ + ۲\,\text{مس}^2\theta}{۱ - \text{مس}^2\theta}$ = ۴ طرفین مساوات کو ۲ پر تقسیم کیا تو

$\frac{۱ + \text{مس}^2\theta}{۱ - \text{مس}^2\theta}$ = ۲ یعنی مس$^2\theta = \frac{1}{3}$ ∴ مس $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ جب $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ θ = ۳۰°

∴ جب $\theta = \frac{1}{2}$ لیکن جب ۳۰° = $\frac{1}{2}$ ∴ θ = ۳۰° اور عام صورت

θ کی یہہ ہے $n\pi + \frac{\pi}{6}$ = جواب ہے ۔

س ۱۴ جب ۴θ + جب θ = ۰ بموجب دفعہ ۲۰ ، = ۲ جب $\frac{۵\theta}{۲}$ جم

$\frac{۳\theta}{۲}$ = ۰ پس جب $\frac{۵\theta}{۲}$ جم $\frac{۳\theta}{۲}$ = ۰ ∴ جب $\frac{۵\theta}{۲}$

= ۰ یا جم $\frac{۳\theta}{۲}$ = ۰

∴ لیکن جب ۰ = ۰ پس $\frac{۵\theta}{۲}$ = ۰ اور جم ۹۰° = ۰ پس $\frac{۳\theta}{۲}$ =

$\frac{\pi}{2}$ عام صورت یہہ ہوگی $\frac{۵\theta}{۲} = n\pi$ اور $\frac{۳\theta}{۲}$ =

مش ۳۰

یہی مطلوب تھا

جم^۶ ا - جب^۶ ا = جم ۲ا (۱ - ¼ جب^۲ ۲ا) جملا دے

= (جم^۲ ا - جب^۲ ا) (جم^۴ ا + جم^۲ ا جب^۲ ا + جب^۴ ا) =

= جم ۲ا {جم^۴ ا + (۱ - جب^۲ ا) جب^۲ ا + جب^۴ ا}

= جم ۲ا (جم^۴ ا + جب^۲ ا) = جم ۲ا (جم^۲ ا × جم^۲ ا + جب^۲ ا)

= جم ۲ا {(۱ - جب^۲ ا) جم^۲ ا + جب^۲ ا}

= جم ۲ا (جم^۲ ا + جب^۲ ا - جب^۲ ا جم^۲ ا) ٭

= جم ۲ا (۱ - جب^۲ ا جم^۲ ا) لیکن - جب^۲ ا جم^۲ ا کو ۴/۴ سے ضرب کیا تو

تو جم ۲ا (۱ - ۴ جب^۲ ا جم^۲ ا / ۴) = جم ۲ا (۱ - جب^۲ ۲ا / ۴)

= جم ۲ا (۱ - ¼ جب^۲ ۲ا)

مساوات ہای ذیل کو حل کرو

س ۱۱

مس$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ + مم$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ = ۴ = $\frac{\text{جب}(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\text{جم}(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\frac{\text{جم}(\frac{\pi}{4}-\theta)}{\text{جب}(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

= ۴ اخراج کسر سے جب$^2(\frac{\pi}{4}-\theta)$ + جم$^2(\frac{\pi}{4}-\theta)$ =

۴ جب$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ جم$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ اسلئے ۱ = ۲ جب$(\frac{\pi}{2}-2\theta)$ =

۲ جم 2θ ∴ جم $2\theta = \frac{1}{2}$ ∴ $2\theta = 2n\pi \mp \frac{\pi}{3}$ ∴ $\theta = n\pi \mp \frac{\pi}{6}$

بطرز دیگر۔ مس$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ + مم$(\frac{\pi}{4}-\theta)$ = ۴ بموجب دفعہ ۴،

$\frac{1-\text{مس}\,\theta}{1+\text{مس}\,\theta}+\frac{1+\text{مس}\,\theta}{1-\text{مس}\,\theta}=4$ یعنی $\frac{(1-\text{مس}\,\theta)^2+(1+\text{مس}\,\theta)^2}{(1-\text{مس}\,\theta)(1+\text{مس}\,\theta)}$

= ۴

∴ $\frac{2+2\,\text{مس}^2\theta}{1-\text{مس}^2\theta}$ = ۴ طرفین مساوات کو ۲ پر تقسیم کیا تو

$\frac{1+\text{مس}^2\theta}{1-\text{مس}^2\theta}$ = ۲ یعنی مس$^2\theta = \frac{1}{3}$ ∴ مس $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ جب $\theta = \frac{1}{2}$ ∴ $\theta = 30^\circ$

∴ جب $\theta = \frac{1}{2}$ لیکن جب $30^\circ = \frac{1}{2}$ ∴ $\theta = 30^\circ$ اور عام صورت

θ کی یہہ ہے $n\pi + \frac{\pi}{6}$ = جواب ہے۔

س ۱۲

جب 2θ + جب θ = ۰ بموجب دفعہ ۲، = ۲ جب $\frac{3\theta}{2}$ جم $\frac{\theta}{2}$

∴ جب $\frac{3\theta}{2}$ جم $\frac{\theta}{2}$ = ۰ پس جب $\frac{3\theta}{2}$ = ۰

یا جم $\frac{\theta}{2}$ = ۰

∴ لیکن جب 0° = ۰ پس $\frac{3\theta}{2}$ = ۰ اور جم 90° = ۰ اسلئے $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$

عام صورت یہہ ہوگی $\frac{3\theta}{2} = n\pi$ اور $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$ =

(۲ن ∓ $\frac{1}{2}$) π = جواب ٭

س ۳۳ جب ۷θ − جب θ = جب ۳θ یعنے ۲ جم ۴θ جب ۳θ − جب ۳θ = ۰

∴ جب ۳θ (۲ جم ۴θ − ۱) = ۰ پس جب ۳θ = ۰ یا ۲ جم ۴θ = ۱

یعنے جم ۴θ = $\frac{1}{2}$ لیکن جب ۰° = ۰ اور جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ پس ۳θ =

= ن π اور ۴θ = ۶۰° = ۲ن π ∓ $\frac{\pi}{3}$

س ۳۴ جب θ + جم θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ طرفین مساوات میں $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کو ضرب دی

∴ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم θ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب θ = $\frac{1}{2}$ لیکن جم $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ اور جب

∴ $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴

جم $\frac{\pi}{4}$ جم θ + جب $\frac{\pi}{4}$ جب θ = $\frac{1}{2}$ یعنے جم (θ − $\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{2}$

لیکن جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ ∴ (θ − $\frac{\pi}{4}$) = ۶۰° = ۲ ن π ∓ $\frac{\pi}{3}$ = جواب ہے

س ۳۵ جب ۵θ = ۱۶ جب^5 θ یعنے جب (۳θ + ۲θ) = ۱۶ جب^5 θ

یا جب ۳θ جم ۲θ + جم ۳θ جب ۲θ = ۱۶ جب^5 θ

= (۱ − ۲ جب^2 θ) (۳ جب θ − ۴ جب^3 θ) + ۲ جب θ جم θ (۴ جم^3

θ − ۳ جم θ) = ۱۶ جب^5 θ

= ۳ جب θ − ۱۰ جب^3 θ + ۸ جب^5 θ + ۲ جب θ (۱ − جب^2 θ)

(۱ − ۴ جب^2 θ) = ۱۶ جب^5 θ

۵ جب θ − ۲۰ جب^3 θ + ۱۶ جب^5 θ = ۱۶ جب^5 θ یعنے ۵ جب θ − ۲۰ جب^3

= ۰ یعنی ۵ جب θ (۱ - ۴ جب² θ) = ۰ یعنی ۵ جب θ = ۰ یا

جب θ = ۰ اور

۱ - ۴ جب² θ = ۰ ∴ جب θ = ½ لیکن جب ۰° = ۰ پس θ = ۰

اور جب ۳۰° = ½ پس θ = ۳۰° عام صورت مین بیان کیا تو

θ = ن π ± π/۶

س ۳۶

جم ۳θ + جم ۲θ + جم θ = ۰ یعنی ۲ جم ۲θ جم θ + جم ۲θ = ۰

پس جم ۲θ (۲ جم θ + ۱) = ۰ یعنی جم ۲θ = ۰ اور ۲ جم θ + ۱ = ۰

یا جم θ = -½ چونکہ جم ۹۰° = ۰ پس ۲θ = ۹۰° اور جم ۱۲۰° = -½

پس θ = ۱۲۰° عام صورت یہ ہے ۲θ = ن π + π/۲ اور θ =

۲ ن π ± ۲π/۳

س ۳۷

جب ۳θ + جب ۲θ + جب θ = ۰ یعنی ۲ جب ۲θ جم θ + جب ۲θ = ۰

پس جب ۲θ (۲ جم θ + ۱) = ۰ یعنی جب ۲θ = ۰ اور ۲ جم θ + ۱ = ۰

∴ جم θ = -½ لیکن جب ۰° = ۰ پس ۲θ = ۰ اور جم ۱۲۰° = -½

∴ θ = ۱۲۰° عام صورت یہ ہے ۲θ = ن π اور θ = ۲ ن π

± ۲π/۳

س ۳۸

مس θ + مس (π/۴ + θ) = ۲

مس θ + (۱ + مس θ)/(۱ - مس θ) = (جب θ)/(جم θ) + (۱ + جب θ/جم θ)/(۱ - جب θ/جم θ) = ۲

یعنے جب θ / جم θ + (جم θ + جب θ) / (جم θ − جب θ) = ۲

= جب θ جم θ − جب² θ + جم² θ + جب θ جم θ = ۲ جم² θ − ۲ جب θ جم θ

بعینہٖ = جم² θ − جب² θ − ۴ جب θ جم θ پس جم θ

۲ جب ۲θ − (جب² θ + جم² θ) = ۰ یا ۲ جب ۲θ − ۱ = ۰

پس جب ۲θ = ½ لیکن جب ۳۰° = ½ پس ۲θ = ۳۰° =

ن π + (−۱)^ن π/۶ ∴

س ۳۹

مس ۲θ = ۸ جم² θ − مم θ

یعنے جب ۲θ / جم ۲θ = ۸ جم² θ − جم θ / جب θ

پس ۲ جب θ جم θ / جم ۲θ + جم θ / جب θ − ۸ جم² θ = ۰

= جم θ { (۲ جب² θ + جم ۲θ − ۸ جم θ جب θ جم ۲θ) / (جم ۲θ جب θ) } = ۰

∴ جم θ = ۰ یا ۲ جب² θ + جم ۲θ − ۸ جم θ جب θ جم ۲θ = ۰

یا ۲ جب² θ + ۱ − ۲ جب² θ − ۴ جب ۲θ جم ۲θ = ۰

یا ۱ − ۲ جب ۴θ = ۰ یا جب ۴θ = ½ لیکن جم ۹۰° = ۰

پس θ = ۹۰° = ن π + π/۲ اور جب ۳۰° = ½ پس ۴θ = ۳۰ =

= ن π + (−۱)^ن π/۶ = جواب کے

س ۴۰

مس (π/۴ + θ) = ۳ مس (π/۴ − θ)

(۱ + مس θ) / (۱ − مس θ) = ۳ (۱ − مس θ) / (۱ + مس θ) اخراج کرنے سے

(۱ + مس ۱)^۲ = ۳ (۱ - مس ۱)^۲ یا ((۱ + مس ۱)/(۱ - مس ۱))^۲ = ۳

طرفین کا جذر لیا +

(۱ + مس ۱)/(۱ - مس ۱) = ± √۳ یعنے مس (π/۴ + ۱) = √۳

لیکن مس ۶۰° = √۳

∴ (π/۴ + ۱) = ۶۰° = ن π ± π/۳ = جواب کے +

حل سوالات نمبر (۷)

سل

بیان کرو کہ جب ۱/۲ = - √(۱ + جب ۱) - √(۱ - جب ۱) جبکہ ۱ واقع ہو درمیان ۴۵۰° اور ۶۳۰° کے

پس ظاہر ہے کہ ۱/۲ واقع ہوگا مابین ۲۲۵° اور ۳۱۵° کے اور جو زاویہ درمیان ۲۲۵° اور ۳۱۵° کے واقع ہو اسکی جب مقدار منفی ہوگی اور عدداً بڑی بھی جم سے ہوگی +

جب ۱/۲ + جم ۱/۲ = √(۱ + جب ۱) . . . . (۱)

جب ۱/۲ - جم ۱/۲ = √(۱ - جب ۱) . . . . (۲)

مساوات (۱) مین بائیاں رکن مقدار منفی ہوگا اور نیز مساوات نمبر (۲) مین بھی بائیاں رکن مقدار منفی ہوگا ∴ دونوںکا جمع کرنے سے

۲ جب ۱/۲ = - √(۱ + جب ۱) - √(۱ - جب ۱) +

س ۲ بموجب دفعہ ۷۸ جب ½ + جم ½ = √(۱+جب ۱) . . . . (۱)

جب ½ - جم ½ = √(۱-جب ۱) . . . . . . (۲)

ظاہر ہے کہ جب زاویہ ½ واقع ہو درمیان ۵۰ ۴۵ اور ۵ ۹۴ کے تو اوسکی جب کے مقدار مثبت ہوگی اور بڑہی بہی ہوگی جم سے پس اسوقت مین بائیاں رکن مساوات (۱) (۲) کا مقدار مثبت ہوگا دونون مساواتونکو تفریق کرنے سے مساوات ذیل حاصل ہوگی

۲ جم ½ = √(۱+جب ۱) - √(۱-جب ۱) .۰

س ۳ سوافق دفعہ ۷۸ جب ½ + جم ½ = √(۱+جب ۱) . . . . . (۱)

جب ½ - جم ½ = √(۱-جب ۱) . . . . . (۲)

جبکہ ½ واقع ہے درمیان - ۵ ۴۵ اور - ۵ ۱۳۵ تو جب اوسکی ہمیشہ مقدار منفی ہوگی اور عدداً کلان ہوگی جم سے پس اسحالت مین بائیاں رکن (۱) و (۲) کا مقدار منفی ہوگا دونو کو جمع کرنے سے یہہ مساوات حاصل ہوگی ۲ جب ½ = √(۱+جب ۱) - √(۱-جب ۱)

س ۴ ایسے دو حدود بتلاؤ جنکی اندر ۱ واقع جبکہ ۲ جب ۱ = √(۱+جب ۲۱) + √(۱-جب ۲۱) حسب دفعہ (۷۸) جب ۱ + جم ۱ = √(۱+جب ۲۱) . . . . (۱)

جب ۱ - جم ۱ = √(۱-جب ۲۱) . . . . (۲)

یہہ ظاہر ہے کہ مساوات (۱) و (۲) کو جمع کرنے سے مساوات

معلوم ہو اوس صورت مین حاصل ہوگی جبکہ مساوات (۱) کا بائیان رکن مقدار منفی ہو اور (۲) کا بائیان رکن مثبت اور یہہ صورت اوس وقت واقع ہوتی ہے جبکہ جم ۱ مقدار منفی ہو اور بڑے ہو جب ۱ سے اور یہہ اوسوقت مین ہوتی ہے جبکہ ۱ واقع درمیان ۵ ۱۳۵ اور ۵ ۲ ۲۲۵ کے ہو اور عام صورت اسکی یہہ ہوگی

۲ ن ط + ۳ط/۴ اور ۲ ن ط + ۵ط/۴

س ۵ بتلاؤ کہ ۱ کن حدون مین واقع ہے جبکہ ۲ جم ۱ = - √(۱ + جب ۲ ۱) + √(۱ - جب ۲ ۱) +

یہہ ظاہر ہے کہ (۴) سوال مین مساوات اول کو مساوات (۲) سے تفریق کرنے سے یہہ مساوات اوسوقت حاصل ہوتی ہے جبکہ مساوات (۱) کا بائیان رکن مقدار منفی اور یہہ صورت اوس حالت مین واقع ہوتی ہے جبکہ جب ۱ مقدار منفی ہو اور بڑی ہو جم ۱ سے اور یہہ صورت اوسوقت مین ہوتی ہے جبکہ ۱ واقع درمیان ۵ ۲۲۵ اور ۵ ۳۱۵ کی ہو ∴ عام صورت یہہ ہوگی ۲ ن ط + ۵ط/۴ اور ۲ ن ط + ۷ط/۴

س ۶ بتلاؤ کہ ۱ کن حدود مین واقع ہے کہ ۲ جب ۱ = √(۱ + جب ۲ ۱) - √(۱ - جب ۲ ۱)

بموجب قاعدہ بالا کے یہہ دو مساواتین حاصل ہوتے ہین +

جب ا + جم ا = $\sqrt{۱ + \text{جب } ۲ا}$ . . . . . (۱)

جب ا - جم ا = - $\sqrt{۱ - \text{جب } ۲ا}$ . . . . . (۲)

مساوات اول سے ظاہر ہوتا ہے کہ ا درمیان ۲ن π - $\frac{\pi}{۴}$ اور ۲ن π + $\frac{۳\pi}{۴}$ کی واقع ہو- اور دوسرے مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ ا درمیان ۲م π + $\frac{۵\pi}{۴}$ اور ۲م π + $\frac{۹\pi}{۴}$ کی واقع ہو جو کہ مساوی ۲(م+۱) π - $\frac{۳\pi}{۴}$ اور ۲(م+۱) π + $\frac{\pi}{۴}$ کی ہے اسلئے نتایج بالا سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ا ضرور واقع ہونا چاہئے درمیان ۲ن π - $\frac{\pi}{۴}$ اور ۲ن π + $\frac{\pi}{۴}$ کے +

مش

فرض کرو کہ زاویہ معلوم ا اور نسبت مفروض م ہے لا اگر ایک حصہ کو تعبیر کرے تو ا - لا دوسری حصہ کو تعبیر کریگا اسلئے جب لا = م جب (ا - لا) +

اسیطرح جب لا = م (جب ا جم لا - جم ا جب لا) تقسیم کرو جم لا سے تو اس نے مس لا = م (جب ا - جم ا مس لا) اسلئے مس لا = $\frac{\text{م جب ا}}{۱ + \text{م جم ا}}$

پس جبکہ مس لا دریافت ہوگیا ہے تو اسیطرح پر لا بھی معلوم ہو سکتا ہے

مش

فرض کرو کہ زاویہ معلوم ا ہے اور نسبت معلوم م : ۱ سے ہے اور لا اگر حصہ زاویہ ا کا ہو تو ا - لا دوسرا حصہ ہوگا اسلئے جم لا = م جم

اسلئے جم لا = م (جم ا جم لا + جب ا جب لا) تقسیم کرو جم لا سے تو آئے
ا = م (جم ا + جب ا مس لا) اسلئے مس لا = ا - م جم ا / م جب ا جس طرح
کہ مس لا معلوم ہوا ہے اسطرح پر لا بہی معلوم ہوسکتا ہے +

مثل ۹

فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے ایک زاویہ مفروضہ کو اور م ظاہر کرتا ہے
نسبت مفروضہ کو اگر لا زاویہ کے ایک حصہ کو تعبیر کرے تو ا - لا دوسرے
حصہ کو تعبیر کریگا اسطرح پر مس لا = م (مس ا - مس لا) / ا + مس ا مس لا
اسیواسطے مس لا (ا + مس ا مس لا) = م (مس ا - مس لا) اسطرح پر ہم
لکھتے ہیں ایک مساوات درجہ دوم کی جس سے قیمت مس لا کی دریافت
ہوسکتی ہے یا ہم اسطرح پر بہی معلوم کرسکتے ہیں +
مس لا = م مس (ا - لا) اسواسطے جب لا / جم لا = م جب (ا - لا) / جم (ا - لا) اسواسطے ۲ جب لا جم (ا - لا)
= ۲ م جب (ا - لا) جم لا - اسواسطے جب ا + جب (۲ لا - ا) = م {جب ا + جب
(ا - ۲ لا)} اسواسطے = م {جب ا - جب (۲ لا - ا)} اسواسطے (م + ۱)
جب (۲ لا - ا) = (م - ۱) جب ا اسلئے جب (۲ لا - ا) = (م - ۱) / (م + ۱) جب ا
لیکن جب (۲ لا - ا) معلوم ہوگیا ہے تو اسطرح پر ۲ لا - ا بہی معلوم ہوسکے اور اسیطرح لا بہی معلوم ہوسکیگا

مثل ۱۰

دریافت کرو قیمت جب ا کی جبکہ مس ا/۲ = ۲ - √۳ کیونکہ مم ا/۲ = ۲ + √۳
∴ مس ا/۲ + مم ا/۲ = (۲ - √۳ + ۲ + √۳) = ۴ لیکن مس ا/۲ + مم ا/۲ = ۲ / جب ا ∴
۲ / جب ا = ۴ یا جب ا = ۲/۴ = ½ جواب کی ہے +

بموجب دفعہ ۹۱ +

∴ مس ۱۰۵° = (۱۰ ± √(۱ + ۱/۳)) / (۱/√۳) = (۱ ± ۲/√۳) / (۱/√۳) = (۱ ± ۲/√۳) / (۱/√۳)

= √۳ ± ۲ لیکن مس ۱۰۵° کا ایک منفی مقدار ہوتا ہے اسلئے = −√۳ − ۲

س۱۴

مس۲ ا/۲ = (۲ جب ا − جب ۲ا) / (۲ جب ا + جب ۲ا)

مس۲ ا/۲ = (۱ − جم ا) / (۱ + جم ا) بموجب دفعہ ا، شمار کنندہ اور نسب نما کو
۲ جب ا سے ضرب دیا

∴ (۲ جب ا (۱ − جم ا)) / (۲ جب ا (۱ + جم ا)) = (۲ جب ا − ۲ جب ا جم ا) / (۲ جب ا + ۲ جب ا جم ا) = (۲ جب ا − جب ۲ا) / (۲ جب ا + جب ۲ا)

یا جملہ ثانی کو حل کر کے مساوی مس۲ ا/۲ کی بنا دیا +

س۱۵

جمق (۱۸۰ − ا) = ۲ جمق ۱/۲ (۱۸۰ + ا) جمق ۱/۲ (۱۸۰ − ا) بلاولے

= ۱ − جم (۱۸۰ − ا) بموجب دفعہ ۳۴ = ۱ + جم ا ایسیہ بموجب دفعہ ۱۱

= ۲ جم² ا/۲ = ۲ (۱ − جب² ا/۲) بموجب دفعہ ۸ اور یہ = ۲ (۱ + جب ا/۲) ×

(۱ − جب ا/۲) لیکن (۱ + جب ا/۲) = ۱ − جم (۹۰ + ا/۲) اور

(۱ − جب ا/۲) = ۱ − جم (۹۰ − ا/۲) مگر ۱ − جم (۹۰ + ا/۲) اور ۱ − جم

(۹۰ − ا/۲) = جمق (۹۰ + ا/۲) اور جمق (۹۰ − ا/۲) اسلئے

۲ (۱ + جب ا/۲)(۱ − جب ا/۲) = ۲ جمق ۱/۲ (۱۸۰ + ا) جمق ۱/۲ (۱۸۰ − ا)

س۱۶

(جم ا + جم ب)² + (جب ا + جب ب)² = ۴ جم² ۱/۲ (ا − ب) بموجب

دفعہ ۶۲ = ۱

$($۲ جم $\frac{۱+ب}{۲}$ جم $\frac{۱-ب}{۲})^۲ + ($۲ جب $\frac{۱+ب}{۲}$ جم $\frac{۱-ب}{۲})^۲$

= ۴ جم^۲ $\frac{۱-ب}{۲}$ {جم^۲ $\frac{۱+ب}{۲}$ + جب^۲ $\frac{۱+ب}{۲}$} = ۴ جم^۲ $\frac{۱}{۲}$

(۱ - ب) × ۱ = ۴ جم^۲ $\frac{۱}{۲}$ (۱ - ب)

س ۱۷

(جم ۱ - جم ب)^۲ + (جب ۱ - جب ب)^۲ = ۴ جب^۲ $\frac{۱}{۲}$ (۱ - ب) بموجب دفعہ ۲۱

$($۲ جب $\frac{۱+ب}{۲}$ جب $\frac{۱-ب}{۲})^۲ + ($۲ جم $\frac{۱+ب}{۲}$ جب $\frac{۱-ب}{۲})^۲$

(۴ جب^۲ $\frac{۱+ب}{۲}$ جب^۲ $\frac{۱-ب}{۲}$) + (۴ جم^۲ $\frac{۱+ب}{۲}$ جب^۲ $\frac{۱-ب}{۲}$)

= ۴ جب^۲ $\frac{۱-ب}{۲}$ {جب^۲ $\frac{۱+ب}{۲}$ + جم^۲ $\frac{۱+ب}{۲}$}

= ۴ جب^۲ $\frac{۱}{۲}$ (۱ - ب) × ۱ = ۴ جب^۲ $\frac{۱}{۲}$ (۱ - ب) یہی ثابت کرنا تھا

س ۱۸

جب $\frac{۱}{۲}$ ۲۲ = $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$ اور جم $\frac{۱}{۲}$ ۲۲ = $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ اور مس $\frac{۱}{۲}$ ۲۲

= $\sqrt{۲}$ - ۱ چونکہ بموجب دفعہ ۴۸ جب $\frac{۱}{۲}$ = $\sqrt{\frac{۱-جم ۱}{۲}}$

∴ جب $\frac{۱}{۲}$ ۲۲ = $\sqrt{\frac{۱-جم ۴۵}{۲}}$ = $\sqrt{\frac{۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۲}}$ = $\sqrt{\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲\sqrt{۲}}}$

= $\sqrt{\frac{\sqrt{۲}-۱}{۲\sqrt{۲}}}$ اسکی نسب نما اور شمار کنندہ کو $\sqrt{۲}$ مین ضرب دیا

تو = $\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$ اور چونکہ جم $\frac{۱}{۲}$ = $\sqrt{\frac{۱+جم ۱}{۲}}$

∴ جم $\frac{۱}{۲}$ ۲۲° = $\sqrt{\frac{۱+جم ۴۵}{۲}}$ = $\sqrt{\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲\sqrt{۲}}}$ اسکو بھی $\sqrt{۲}$

مین ضرب دیدیا تو = $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ چونکہ بموجب دفعہ ۱۹ مس $\frac{۱}{۲}$

= $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱+مس^۲ ۱}}{مس ۱}$ جسمین مس = مس ۱ ∴ مس $\frac{۱}{۲}$ ۲۲ =

= $\frac{-۱ \pm \sqrt{۱+مس^۲ ۴۵}}{مس ۴۵}$ لیکن مس ۴۵ = ۱ اسلئے =

س ۲۱

$\frac{\text{قع ۱ + مس ۱}}{\text{قع ۱ − مس ۱}}$

جب $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ + جم $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$ = $\frac{\text{جب } \theta}{\text{۱ جمق}}$

= جب ۴۵ جم $\frac{\theta}{2}$ − جم ۴۵ جب $\frac{\theta}{2}$

+ جم ۴۵ جم $\frac{\theta}{2}$ + جب ۴۵ جب $\frac{\theta}{2}$

= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم $\frac{\theta}{2}$ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب $\frac{\theta}{2}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم $\frac{\theta}{2}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب $\frac{\theta}{2}$

= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × ۲ جم $\frac{\theta}{2}$ =

= $\frac{\text{۱ جم } \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}}$ کسر اور مخرج کو جب $\frac{\theta}{2}$ سے ضرب کیا تو

= $\frac{\text{۲ جم } \frac{\theta}{2} \text{ جب } \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2} \text{ جب } \frac{\theta}{2}}$ = $\frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{2 \text{ جب}^2 \frac{\theta}{2}}}$ = $\frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{\text{۱ − جم } \theta}}$ =

$\frac{\text{جب } \theta}{\sqrt{\text{۱ جمق } \theta}}$

س ۲۲

۴ جب^2 $\frac{\theta}{4}$ (۱ − جب $\frac{\theta}{2}$)

= ۴ جب^2 $\frac{\theta}{4}$ (جب^2 $\frac{\theta}{4}$ + جم^2 $\frac{\theta}{4}$ − ۲ جب $\frac{\theta}{4}$ جم $\frac{\theta}{4}$)

= ۴ جب^2 $\frac{\theta}{4}$ (جب $\frac{\theta}{4}$ − جم $\frac{\theta}{4}$)^2

= (۲ جب^2 $\frac{\theta}{4}$ − ۲ جب $\frac{\theta}{4}$ جم $\frac{\theta}{4}$)^2

= (۱ − جم $\frac{\theta}{2}$ − جب $\frac{\theta}{2}$)^2

اور $\sqrt{\text{۱ + جب } \theta}$ = $\sqrt{\text{جب}^2 \frac{\theta}{2} + \text{جم}^2 \frac{\theta}{2} + \text{۲ جب } \frac{\theta}{2} \text{ جم } \frac{\theta}{2}}$

= جب $\frac{\theta}{2}$ + جم $\frac{\theta}{2}$

اسلئے $\{$۱ − $\sqrt{\text{۱ + جب } \theta}\}^2$ = (۱ − جب $\frac{\theta}{2}$ − جم $\frac{\theta}{2}$)^2

س ۲۳

$۲\,\text{جم}^{۲}\frac{θ}{۲} = ۱ + \text{جم}\,θ$ پس اسواسطے

$$۴\,\text{جم}^{۴}\frac{θ}{۲} = (۱ + \text{جم}\,θ)^{۲} = ۱ + ۲\,\text{جم}\,θ + \text{جم}^{۲}θ$$

$$= ۱ + ۲\,\text{جم}\,θ + \frac{۱ + \text{جم}\,۲θ}{۲} = \frac{۱}{۲}(۳ + ۴\,\text{جم}\,θ + \text{جم}\,۲θ)$$

اسواسطے $\text{جم}^{۴}\frac{θ}{۲} = \frac{۱}{۸}(۳ + ۴\,\text{جم}\,θ + \text{جم}\,۲θ)$

اس قاعدہ کو واسطے ہر ایک سوال کے استعمال کرو جیسا کہ

$$\text{جم}^{۴}\frac{π}{۸} + \text{جم}^{۴}\frac{۳π}{۸} + \text{جم}^{۴}\frac{۵π}{۸} + \text{جم}^{۴}\frac{۷π}{۸}$$

$$= \frac{۱۲}{۸} + \frac{۱}{۲}\left(\text{جم}\frac{π}{۴} + \text{جم}\frac{۳π}{۴} + \text{جم}\frac{۵π}{۴} + \text{جم}\frac{۷π}{۴}\right) +$$

$\frac{۱}{۸}\left(\text{جم}\frac{π}{۲} + \text{جم}\frac{۳π}{۲} + \text{جم}\frac{۵π}{۲} + \text{جم}\frac{۷π}{۲}\right) = \frac{۳}{۲}$ بموجب دفعہ (۴۵)

س ۲۴

$$\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^{\circ} = \frac{\text{جب}\,۱۵^{\circ}}{۱ + \text{جم}\,۱۵^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}}{۱ + \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + ۱}$$

$$= \frac{(\sqrt{۳} - ۱)(۲\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۳})}{(۲\sqrt{۲} + ۱ - \sqrt{۳})(۲\sqrt{۲} + \sqrt{۳} + ۱)} = \frac{۲\sqrt{۶} - ۲\sqrt{۲} - ۴ + ۲\sqrt{۳}}{۶ + ۴\sqrt{۲}}$$

$$= \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲} - ۲ + \sqrt{۳}}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

شمارکنندہ اور نسب نما کو $۳ - ۲\sqrt{۲}$ مین ضرب دیا +

تو $\sqrt{۶} - \sqrt{۳} + \sqrt{۲} - ۲$ حاصل ہوا جو کہ = جواب کے

س ۲۵

$$\text{مس}\,۸۲\tfrac{۱}{۲}^{\circ} = \frac{\text{جب}\,۱۶۵^{\circ}}{۱ + \text{جم}\,۱۶۵^{\circ}} = \frac{\text{جب}\,۱۵^{\circ}}{۱ - \text{جم}\,۱۵^{\circ}} = \frac{\text{جم}\,۱۵^{\circ}}{۱ + \text{جب}\,۱۵^{\circ}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲}}}{۱ + \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۲\sqrt{۲} - ۱ + \sqrt{۳}}$$

= − (ج۳ − ۱ − ج۲)(۱ + ج۳) / (ج۳ − ۱ − ج۲)(ج۳ + ۱ − ج۲)

= − (ج۳ − ۲ − ج۲ + ج۶) / (ج۲ ۲ − ۳) = (ج۶ − ج۲ − ج۳ + ۲) / (ج۲ ۲ − ۳)

اسجگہ بھی نسب نما اور شمار کنندہ کو ۳ + ۲ ج۲ مین ضرب دیا

تو ۲ + ج۲ − ج۳ − ج۶ حاصل ہوا جو کہ = جواب کے ہے

س ۲۶

مس لا = (۳ مس لا/۳ − مس۳ لا/۳) / (۱ − ۳ مس۲ لا/۳)

اور اسلئے یہہ = (ج۳ + ۲) مس لا/۳

اور یہہ = (۳ − مس۲ لا/۳) / (۱ − ۳ مس۲ لا/۳) = ۲ + ج۳

اسلئے ۳ − مس۲ لا/۳ = (۲ + ج۳)(۱ − ۳ مس۲ لا/۳)

اسلئے (۶ + ۳ ج۳ − ۱) مس۲ لا/۳ = ۲ + ج۳ − ۳

اسلئے مس۲ لا/۳ = (۱ − ج۳) / (ج۳ ۳ + ۵) = (ج۳ ۳ − ۵)(۱ − ج۳) / (ج۳ ۳ − ۵)(ج۳ ۳ + ۵)

= (۱۴ − ج۳ ۸) / (۲۷ − ۲۵) = ج۳ ۴ − ۷

اسلئے مس لا/۳ = ± (ج۳ ۴ − ۷) = ± (ج۳ − ۲)

اسواسطے مس لا = ± (ج۳ + ۲)(ج۳ − ۲) = ± ۱

ش ۲۷

$$\text{سا} + \text{جم}\,ا = \frac{\text{جب}\,ا}{\text{جم}\,ا} + \frac{\text{جم}\,ا}{\text{جب}\,ا}$$

$$= \frac{\text{جب}^{۲}ا + \text{جم}^{۲}ا}{\text{جب}\,ا\ \text{جم}\,ا} = \frac{۱}{\text{جم}\,ا\ \text{جب}\,ا}$$

$$= \frac{۲}{۲\,\text{جب}\,ا\ \text{جم}\,ا} = \frac{۲}{\text{جب}\,۲ا}$$ اب ا کی جگہه اسکی قیمت رکهو

$$= \frac{۲}{\text{جب}\,۲\left(ن + \frac{۱}{۴} \mp \frac{۱}{۴}\right)} = \frac{۲}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{۲} \mp \frac{\pi}{۴}\right)} = \frac{۲}{\text{جم}\,\frac{\pi}{۴}}$$

$$= ۲ \div \frac{۱}{۲} = ۴$$

ش ۲۸

$$\frac{\text{جم}\,ا\ \text{جم}\,۱۳ا}{\text{جم}\,۱۳ا + \text{جم}\,۱۵ا} = \frac{\text{جم}\,ا\ \text{جم}\,۱۳ا}{۲\ \text{جم}\,ا\ \text{جم}\,۱۴ا}$$

$$= \frac{\text{جم}\,۱۳ا}{۲\ \text{جم}\,۱۴ا} = -\frac{۱}{۲}$$

کیونکہ $۱۳ا + ۱۴ا = \pi$ اور اسلئے $\text{جم}\,۱۳ا = -\text{جم}\,۱۴ا$

ش ۲۹

$\text{قع}\,(ی + ا) + \text{قع}\,(ی - ا) = ۲\,\text{قع}\,ی$ اسواسطے

$$\frac{۱}{\text{جم}\,(ی+ا)} + \frac{۱}{\text{جم}\,(ی-ا)} = \frac{۲}{\text{جم}\,ی}$$

اسواسطے $$\frac{\text{جم}\,(ی-ا) + \text{جم}\,(ی+ا)}{\text{جم}\,(ی+ا)\,.\,\text{جم}\,(ی-ا)} = \frac{۲}{\text{جم}\,ی}$$

اسواسطے $$\frac{۲\,\text{جم}\,ی\ \text{جم}\,ا}{\text{جم}^{۲}ی - \text{جب}^{۲}ا} = \frac{۲}{\text{جم}\,ی}$$

اسواسطے $\text{جم}^{۲}ی\ \text{جم}\,ا = \text{جم}^{۲}ی - \text{جب}^{۲}ا$

$$\text{اسواسطے}\ \text{جم}^۲\,\text{ی} = \frac{\text{جب}^۲\,\text{ا}}{۱-\text{جم}\,\text{ا}} = \frac{۱-\text{جم}^۲\,\text{ا}}{۱-\text{جم}\,\text{ا}}$$

$$= ۱+\text{جم}\,\text{ا} = ۲\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

$$\text{اسواسطے}\ \text{جم}\,\text{ی} = \pm\sqrt{۲}\ \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}$$

مش ۳

$$\text{مس}^۲\,\frac{\text{ہ}}{۲} = \frac{۱+\text{س}}{۱-\text{س}}\ \text{مس}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}\ \ \text{اسواسطے}$$

$$\frac{۱-\text{مس}^۲\,\frac{\text{ہ}}{۲}}{۱+\text{مس}^۲\,\frac{\text{ہ}}{۲}} = \frac{۱-\frac{۱+\text{س}}{۱-\text{س}}\cdot\frac{\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}}{\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}}}{۱+\frac{۱+\text{س}}{۱-\text{س}}\cdot\frac{\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}}{\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}}}$$

$$= \frac{(۱-\text{س})\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}-(۱+\text{س})\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}}{(۱-\text{س})\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}+(۱+\text{س})\,\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}}$$

اسلئے بموجب دفعہ ۶، کے

$$\text{جم}\,\text{ہ} = \frac{\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}-\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}-\text{س}\left(\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}+\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}\right)}{\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}+\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}-\text{س}\left(\text{جم}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}-\text{جب}^۲\,\frac{\text{ی}}{۲}\right)}$$

$$= \frac{\text{جم}\,\text{ی}-\text{س}}{۱-\text{س}\,\text{جم}\,\text{ی}}\ +$$

آٹھواں باب

بموجب دفعہ ۱۰۲ کے

سوال ۱ — جم (ا + ب + س) = جم ا جم ب جم س - جم ا جب ب جب س - جم ب جب س جب ا - جم س جب ا جب ب

تقسیم کیا طرفین کو جم ا جم ب جم س پر ٭

تو جم (ا + ب + س) / جم ا جم ب جم س = ۱ - مس ب مس س - مس س مس ا - مس ا مس ب ٭

بموجب دفعہ ۱۰۲ کے

سوال ۲ — جب (ا + ب + س) = جب ا جم ب جم س + جب ب جم س جم ا + جب س جم ا جم ب - جب ا جب ب جب س

طرفین کو تقسیم کرو جم ا جم ب جم س پر ٭

تو ∴ جب (ا + ب + س) / جم ا جم ب جم س = مس ا + مس ب + مس س - مس ا مس ب مس س ٭

سوال ۳ — جب (ا - ب) + جب (ب - س) = ۲ جب (ا - س)/۲ . جم

جب س} جم ب

جب (ا + س) جم س = جب (ا + ب + س - ب) جم س

= {جب (ا + ب + س) جم ب - جم (ا + ب + س) جب ب} جم س +

∴ جب (ا + ب) جم ب - جب (ا + س) جم س =

جم (ا + ب + س) {جب ب جم س - جب س جم ب}

= جم (ا + ب + س) جب (ب - س)

سؔ جم (ا + ب + س) + جم (ا + ب - س) =

۲ جم (ا + ب) جم س اور جم (ا - ب + س) + جم (ب + س - ا) = ۲ جم (ا - ب) جم س

ان دونوں رقموں کی حاصل جمع = ۲ جم س {جم (ا + ب) + جم (ا - ب)}

= ۴ جم ا جم ب جم س +

شؔ جم ۲ا + جم ۲ب = ۲ جم (ا + ب) جم (ا - ب)

جم ۲ س + جم ۲ (ا + ب + س)

= ۲ جم (۲ س + ا + ب) جم (ا + ب)

حاصل جمع ان دونوں کی = ۲ جم (ا + ب) {جم (ا - ب)

+ جم (۲س + ا + ب) }

= ۲ جم (ا + ب) ۲ جم (ا + س) جم (ب + س)

= ۴ جم (ا + ب) جم (ب + س) جم (س + ا)

س ۸

جب (ا − ب) جب (ب − س) جب (س − ا) =

ذو اضعاف اقل کے ∴ کسر کل کے مساوی ہے اسکے

= −جب ا جب (ب − س) − جب ب جب (س − ا)

− جب س جب (ا − ب)

= − ½ { جم (ا − ب + س) − جم (ا + ب − س) } −

½ { جم (ب + ا − س) − جم (ب + س − ا) } −

½ { جم (س − ا + ب) − جم (س + ا + ب) } = ۰

س ۹

جم (ا + ب) جب ب − جم (ا + س) جب س

= ½ { جب (ا + ب + ب) − جب (ا + ب − ب) }

− ½ { جب (ا + س + س) − جب (ا + س − س) }

= ½ جب (ا + ۲ب) − ½ جب (ا + ۲س)

جب (ا + ب) جم ب − جب (ا + س) جم س

= ½ { جب (ا + ب + ب) + جب (ا + ب − ب) }

∴ ½ {جب (ا + س + س) + جب (ا + س - س)}

= ½ جب (ا + ۲ ب) - ½ جب (ا + ۲ س) چونکہ دونوں

رقمین باہم برابر ہین اسلئے اول رقم بھی دوسری سے برابر ہے

مثل ۱۰

جب (ا + ب - ۲ س) جم ب - جب (ا + س - ۲ ب) جم س

= ½ {جب (ا + ۲ ب - ۲ س) + جب (ا - ۲ س) - جب

(ا + ۲ س - ۲ ب) - جب (ا - ۲ ب)} +

جب (ب - س) {جم (ب + س - ا) + جم (ا + س - ب)

+ جم (ا + ب - س)}

= ½ {جب (۲ ب - ا) + جب (ا - ۲ س)} +

½ {جب ا + جب (۲ ب - ۲ س - ا)} + ½ {- جب ا

+ جب (۲ ب - ۲ س + ا)}

= ½ {جب (۲ ب - ا) + جب (ا - ۲ س) + جب

(۲ ب - ۲ س - ا) + جب (۲ ب - ۲ س + ا)}

اسلئے یہہ دونوں رقمین باہم برابر ہین +

مثل ۱۱

جب (ا + ب + س) جب ب = ½ {جم (ا + س) - جم

(ا + ۲ ب + س)}

جب (ا + ب) جب (ب + س) = ½ {جم (ا - س) - جم (ا + ب + ۲ س ا)}

جب ا جب س = ½ {جم (ا − س) − جم (ا + س)}

جب (ا + ب) جب (ب + س) − جب ا جب س

= ½ {جم (ا + س) − جم (ا + ۲ ب + س)}

= جب (ا + ب + س) جب ب

س ۱۲

جب ا جب ب جب (ب − ا) = ½ {جم (ا − ب)

− جم (ا + ب)} جب (ب − ا) = ½ جم (ب − ا) جب

(ب − ا) − ¼ {جب ۲ ب − جب ۲ ا}

= ¼ جب ۲ (ب − ا) − ¼ جب ۲ ب + ¼ جب ۲ ا

جب ب جب س جب (س − ب) اور جب س جب ا جب

(ا − س) اسیطرح تیسری مثال کے بموجب

جب (ب − ا) جب (س − ب) جب (ا − س) = ¼ {جب

(ا − ب) + جب ۲ (ب − س) + جب ۲ (س − ا)}

پس ان چارون کی حاصل جمع = صفر کے ہے ۰

س ۱۳

جم (ا + ب) جب (ا − ب) = ½ (جب ۲ ا − جب ۲ ب)

جم (ب + س) جب (ب − س) = ½ (جب ۲ ب − جب ۲ س)

جم (س + ص) جب (س − ص) = ½ (جب ۲ س − جب ۲ ص)

جم (ص + ا) جب (ص − ا) = ½ (جب ۲ ص − جب ۲ ا)

ان چارون رقمونکا حاصل جمع = صفر کے ہو ۰

س ۱۴

$جب\,(ص - ب)\,جب\,(ا - س) = \frac{1}{2}\{جم\,(ا + ب - س - ص) - جم\,(ا - ب - س + ص)\}$

$جب\,(ب - س)\,جب\,(ا - ص) = \frac{1}{2}\{جم\,(ا - ب + س - ص) - جم\,(ا + ب - س - ص)\}$

$جب\,(س - ص)\,جب\,(ا - ب) = \frac{1}{2}\{جم\,(ا - ب - س + ص) - جم\,(ا - ب + س - ص)\}$

اور ان تینوں کا حاصل جمع = صفر کے ہے +

س ۱۵

$مم\,\frac{ا}{2} + مم\,\frac{ب}{2} = \frac{جم\,\frac{ا}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}} + \frac{جم\,\frac{ب}{2}}{جب\,\frac{ب}{2}} = \frac{جب\,\frac{ب}{2}\,جم\,\frac{ا}{2} + جب\,\frac{ا}{2}\,جم\,\frac{ب}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}}$

$= \frac{جب\,\frac{1}{2}(ا + ب)}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}} = \frac{جم\,\frac{س}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}}$

$\frac{جم\,\frac{س}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}} + مم\,\frac{س}{2} = جم\,\frac{س}{2}\left\{\frac{1}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}} + \frac{1}{جب\,\frac{س}{2}}\right\}$

$= \frac{جم\,\frac{س}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}\,جب\,\frac{س}{2}}\left\{جب\,\frac{س}{2} + جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}\right\}$

$= \frac{جم\,\frac{س}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}\,جب\,\frac{س}{2}}\left\{جم\,\frac{1}{2}(ا + ب) + جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}\right\}$

$= \frac{جم\,\frac{ا}{2}\,جم\,\frac{ب}{2}\,جم\,\frac{س}{2}}{جب\,\frac{ا}{2}\,جب\,\frac{ب}{2}\,جب\,\frac{س}{2}} = مم\,\frac{ا}{2}\,مم\,\frac{ب}{2}\,مم\,\frac{س}{2}$

س ۱۶

$جب\,ا + جب\,ب = 2\,جب\,\frac{1}{2}(ا + ب)\,جم\,\frac{1}{2}(ا - ب)$

$= 2\,جم\,\frac{س}{2}\,جم\,\frac{1}{2}(ا - ب)$

$جب\,س = 2\,جب\,\frac{س}{2}\,جم\,\frac{س}{2} = 2\,جم\,\frac{س}{2}\,جم\,\frac{1}{2}(ا + ب)$

$\therefore جب\,ا + جب\,ب + جب\,س = 2\,جم\,\frac{س}{2}\{جم\,\frac{1}{2}(ا - ب)$

+ جم ½ (ا + ب) }

= + جم س/۲ ۲ جم ا/۲ جم ب/۲ = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

س ۱۷

جب ا + جب س = ۲ جب ½ (ا + س) جم ½ (ا − س)

= ۲ جم ب/۲ جم ½ (ا − س)

جب ب = ۲ جب ب/۲ جم ب/۲ = ۲ جم ب/۲ جم ½ (ا + س)

∴ جب ا − جب ب + جب س = ۲ جم ب/۲ { جم ½ (ا − س) −

جم ½ (ا + س) }

= ۲ جم ب/۲ . ۲ جب ا/۲ جب س/۲ =

۴ جب ا/۲ جم ب/۲ جب س/۲ .

س ۱۸

جم ۲ ا + جم ۲ ب = ۲ جم (ا + ب) جم (ا − ب) = − ۲ جم

س جم (ا − ب)

جم ۲ س = ۲ جم² س − ۱ = − ۲ جم س جم (ا + ب) − ۱

∴ جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ س = − ۲ جم س { جم (ا − ب)

+ جم (ا + ب) } − ۱

= − ۲ جم س ۲ جم ا . جم ب − ۱ = − ۴ جم ا جم ب جم س − ۱

∴ جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ س + ۴ جم ا جم ب جم س = − ۱

س ۱۹

جم ۴ ا + جم ۴ ب = ۲ جم ۲ (ا + ب) جم ۲ (ا − ب) =

سن ۲

۲ جم ۲ س جم ۲ (ا - ب)

جم ۴ س - ۲ جم ۲ ۲ س - ۱ = ۲ جم ۲ س جم ۲ (ا + ب) - ۱

∴ جم ۴ ا + جم ۴ ب + جم ۴ س = ۲ جم ۲ س {جم ۲ (ا - ب)

+ جم ۲ (ا + ب)} - ۱

= ۲ جم ۲ س . ۲ جم ۲ ا جم ۲ ب - ۱ = ۴ جم ۲ ا جم ۲ ب

جم ۲ س - ۱

∴ جم ۴ ا + جم ۴ ب + جم ۴ س + ۱ = ۴ جم ۲ ا جم ۲ ب

جم ۲ س

فرض کرو کہ ا = ½ (π - ا) اور ب = ½ (π - ب) اور

س = ½ (π - س)

∴ ا + ب + س = ½ (۳π - ا - ب - س) = ½ × ۲π =

π ٭

اسجگہ ۱۶ مثال کے بموجب

جب ا + جب ب + جب س = ۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲

یعنے جم ا/۲ + جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جم (π - ا)/۴ جم (π - ب)/۴

جم (π - س)/۴ ٭

س ۲۱

فرض کرو ا = ½ (π - ا) اور ب = ½ (π - ب) اور

س = ½ (π - س)

∴ ا + ب + س = ½ (۳π - ا - ب - س) = ½ ×

۲π = π

اجگھ ۷ امثال کے بموجب

جب ا - جب ب + جب س =

۴ جب ا/۲ جم ب/۲ جب س/۲

∴ جم ا/۲ - جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جب (π - ا)/۴

جم (π - ب)/۴ جب (π - س)/۴

س ۲۲

فرض کرو کہ ا = ½ (π - ا) اور ب = ½ (π - ب)

اور س = ½ (π - س)

∴ ا + ب + س = ½ (۳π - ا - ب - س) =

½ × ۲π = π

اجگھ ۳۰۱ دفعہ ۵ کے بموجب

جم ا + جم ب + جم س - ۱

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب س/۲

یعنے جب ا/۲ + جب ب/۲ + جب س/۲ - ۱ = ۴ جب (π-ا)/۴ -

جب (π-ب)/۴ جب (π-س)/۴ ۔

س ۲۳

جب² ا + جب² ب + جب² س = ۱/۲ {۱ - جم ۲ا + ۱ - جم ۲ب + ۱ - جم ۲س} ۔

= ۳/۲ - ۱/۲ {جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س}

= ۳/۲ + ۱/۲ {۱ + ۴ جم ا جم ب جم س}

اسجگہ ۱۸ مثال کے بموجب

= ۲ + ۲ جم ا جم ب جم س

∴ جب² ا + جب² ب + جب² س - ۲ جم ا جم ب جم س = ۲ ۔

س ۲۴

جب² ۲ا + جب² ۲ب + جب² ۲س

= ۱/۲ {۳ - جم ۴ا - جم ۴ب - جم ۴س}

= ۳/۲ - ۱/۲ {۴ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲س - ۱} ۔

یہاں ۱۵ مثال کے بموجب

= ۲ - ۲ جم ۲ا جم ۲ب جم ۲س ۔

∴ جب۲ ۲ا + جب۲ ۲ب + جب۲ ۲س + ۲ جم ۲ا جم ۲ب

جم ۲س = ۲ +

س ۲۵

مس $\frac{ا}{۲}$ مس $\frac{ب}{۲}$ + مس $\frac{ب}{۲}$ مس $\frac{س}{۲}$ + مس $\frac{س}{۲}$ مس $\frac{ا}{۲}$

$= \frac{۱}{مم \frac{ا}{۲} مم \frac{ب}{۲}} + \frac{۱}{مم \frac{ب}{۲} مم \frac{س}{۲}} + \frac{۱}{مم \frac{س}{۲} مم \frac{ا}{۲}}$

$= \frac{مم \frac{ا}{۲} + مم \frac{ب}{۲} + مم \frac{س}{۲}}{مم \frac{ا}{۲} مم \frac{ب}{۲} مم \frac{س}{۲}} = ۱$

۱۵ مثال کے بموجب

س ۲۶

جب ا + جب ب - جب س

= ۴ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{س}{۲}$

بموجب مثال ۱۷ کے

جب ا + جب ب + جب س = ۴ جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{س}{۲}$

بموجب مثال ۱۶ کے

اس تقسیم سے $\frac{جب ا + جب ب - جب س}{جب ا + جب ب + جب س} = \frac{جب \frac{ا}{۲} جب \frac{ب}{۲}}{جم \frac{ا}{۲} جم \frac{ب}{۲}}$

= مس $\frac{ا}{۲}$ مس $\frac{ب}{۲}$

ش ٢٧

جم ا جب ب جب س + جم ب جب ا جب س

+ جم س جب ا جب ب +

= جب س (جم ا جب ب + جم ب جب ا) + جم س جب ا

جب ب +

= جب س جب (ا + ب) + جم س جب ا جب ب

= جب^٢ س + جم س جب ا جب ب

= ١ − جم^٢ س + جم س جب ا جب ب

= ١ + جم س {جم (ا + ب) + جب ا جب ب} =

١ + جم س جم ا جم ب +

ش ٢٨

٢٧ وین مثال کو لو اور تقسیم کرو جب ا جب ب جب س پر

∴ (جم ا)/(جب ا) = (جم ا جم ب جم س)/(جب ا جب ب جب س) + ١/(جب ا جب ب جب س)

+ (جم ب)/(جب ب) + (جم س)/(جب س) یہی مطلوب تھا +

ش ٢٩

٧ اوین مثال کے بموجب (جب ب + جب س − جب ا)(جب س + جب ا − جب ب) / (٤ جب ا جب ب)

= (١٦ جب (س/٢) جب (ب/٢) جم (ا/٢) جب (س/٢) جب (ا/٢) جم (ب/٢)) / (١٦ جب (ا/٢) جم (ا/٢) جب (ب/٢) جم (ب/٢)) = جب^٢ (س/٢)

ش ٣٠

جم ا + (جب ا)/(جب ب جب س) = (جم ا)/(جب ا) + (جب ا)/(جب ب جب س)

= (جم ا جب ب جب س + جب^٢ ا)/(جب ا جب ب جب س) = (١ − جم^٢ ا + جم ا جب ب جب س)/(جب ا جب ب جب س)

= (۱ + جم ۱ {جم (ب + س) + جب ب جب س}) / (جب ۱ جب ب جب س) = (۱ + جم ۱ جم ب جم س) / (جب ۱ جب ب جب س)

اسجگہ ہمین ایک جملہ ملا ہے جسمین ۱ و ب و س باندازہ مرتبط ہین اور ہم اوسی طریقہ سے اس سے وہی نتیجہ حاصل کرینگے جو اگر اصلی مثالین ۱ و ب و س مین سے کسی دو مقدار کو ایکدوسیرکی جگہہ بدلے

س ۱۲

مس ۱ + مس ب + مس س = مس ۱ مس ب مس س بموجب دفعہ ۱۰۲ کے

جب ۱ + جب ب + جب س = ۴ جم ۱/۲ جم ب/۲ جم س/۲ موافق مثال ۱۷ کے

∴ تقسیم سے (مس ۱ + مس ب + مس س) / ۲ (جب ۱ + جب ب + جب س) = (مس ۱ مس ب مس س) / (۱۶ جم ۱/۲ جم ب/۲ جم س/۲)

= (۸ جب ۱/۲ جم ۱/۲ جب ب/۲ جم ب/۲ جب س/۲ جم س/۲) / (۱۶ جم ۱ جم ب جم س جم ۱/۲ جم ب/۲ جم س/۲) =

(مس ۱/۲ مس ب/۲ مس س/۲) / (۲ جم ۱ جم ب جم س)

س ۱۳

جب ن ۱ + جب ن ب = ۲ جب ن/۲ (۱ + ب) جم ن/۲ (۱ − ب)

= ۲ جب ن/۲ (π − س) جم ن/۲ (۱ − ب)

= ۲ {جب نπ/۲ جم ن س/۲ − جم نπ/۲ جب ن س/۲} جم ن/۲ (۱ − ب)

= ۲ جب نπ/۲ جم ن س/۲ جم ن/۲ (۱ − ب) ∵ جم نπ/۲ = ۰

نیز جب ن س = ۲ جب ن س/۲ جم ن س/۲

= ۲ جب ن/۲ (π − ۱ − ب) جم ن س/۲

= ۲ {جب نπ/۲ جم ن/۲ (۱ + ب) − جم نπ/۲ جب ن/۲ (۱ + ب)} جم ن س/۲

= ۲ جب ن π/۲ جم ن/۲ (ا + ب) جم ن س/۲

∴ جب ن ا + جب ن ب + جب ن س

= ۲ جب ن π/۲ جم ن س/۲ {جم ن/۲ (ا − ب) + جم ن/۲ (ا + ب)}

= ۴ جب ن π/۴ جم ن ا/۲ جم ن ب/۲ جم ن س/۲

۳۲ مثال کے بموجب

س ۳۳

جب ن ا + جب ن ب = ۲ {جب ن π/۲ جم ن س/۲ − جم ن π/۲ جب ن س/۲} جم ن/۲ (ا − ب)

= − ۲ جم ن π/۲ جب ن س/۲ جم ن/۲ (ا − ب) چونکہ جب ن π/۲ =

نیز جب ن س = ۲ جب ن س/۲ جم ن س/۲

= ۲ جم ن/۲ (π − ا − ب) جب ن س/۲

= ۲ {جم ن π/۲ جم ن/۲ (ا + ب) + جب ن π/۲ جب ن/۲ (ا + ب)} جب ن س/۲

= ۲ جم ن π/۲ جب ن س/۲ جم ن/۲ (ا + ب) ∴ جب ن ا + جب ن ب + جب ن س

= − ۲ جم ن π/۲ جب ن س/۲ {جم ن/۲ (ا − ب) − جم ن/۲ (ا + ب)}

= − ۴ جم ن π/۲ جب ن س/۲ جب ن ا/۲ جب ن ب/۲

۲۰ مثال کے بموجب

س ۳۴

جم 1/۲ + جم ب/۲ + جم س/۲ = ۴ جم (π − 1)/۴ جم (π − ب)/۴ جم (π − س)/۴

= ۴ جم (ب + س)/۴ جم (س + 1)/۴ جم (1 + ب)/۴

س ۳۵

مس ب/مس 1 + مس س/مس 1 = 1/مس 1 (جب ب/جم ب + جب س/جم س)

= جب (ب + س)/(مس 1 جم ب جم س)

= جب 1/(مس 1 جم ب جم س) = جم 1/(جم ب جم س) اسطرح ہم دیکھہ سکتے ہیں

کہ اوپر کی مثال = جم 1/(جم ب جم س) + جم ب/(جم س جم 1) + جم س/(جم 1 جم ب)

= (جم² 1 + جم² ب + جم² س)/(جم 1 جم ب جم س) = (۳ − جب² 1 − جب² ب − جب² س)/(جم 1 جم ب جم س)

= (۱ + ۲ جم 1 جم ب جم س)/(جم 1 جم ب جم س) ۳۲ مثال کے بموجب

= قع 1 قع ب قع س − ۲

س ۳۶

فرض کرو کہ 1 + ب + س + د = ۰۸۰، پھر 1 + ب = ۱۸۰ − س − د

∴ مس (1 + ب) = − مس (س + د) بموجب دفعہ ۸ ۴

∴ (مس 1 + مس ب)/(۱ − مس 1 مس ب) = − (مس س + مس د)/(۱ − مس س مس د)

∴ (مس 1 + مس ب) (۱ − مس س مس د)

= − (مس س + مس د) (۱ − مس 1 مس ب)

∴ مس 1 + مس ب + مس س + مس د

$= (\text{مس ا} + \text{مس ب})\ \text{مس س مس د} + (\text{مس س} + \text{مس د})\ \text{مس ا مس ب} +$

$= \text{مس ب مس س مس د} + \text{مس ا مس س مس د}$

$+ \text{مس ا مس ب مس د} + \text{مس ا مس ب مس س}$

س ۳۷

$\frac{\text{جب}^2\text{س}}{\text{جب}^2\text{ا}} = ۱ - \frac{\text{مس}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{مس ا}} = ۱ - \frac{\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\ \text{جم ا}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})\ \text{جب ا}}$

$= \frac{\text{جب ا جم}(\text{ا}-\text{ب}) - \text{جم ا جب}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})\ \text{جب ا}} = \frac{\text{جب}\{\text{ا}-(\text{ا}-\text{ب})\}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})\ \text{جب ا}}$

$= \frac{\text{جب ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})\ \text{جب ا}}$ اور اسلئے $\text{جب}^2\text{س} = \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}$

$\therefore \text{جم}^2\text{س} = ۱ - \text{جب}^2\text{س} = ۱ - \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) - \text{جب ا جب ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}$

$= \frac{\text{جم ا جم ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}$ $\therefore \frac{\text{جب}^2\text{س}}{\text{جم}^2\text{س}} = \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}$

$\div \frac{\text{جم ا جم ب}}{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})} = \frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}$ یعنے $\text{مس}^2\text{س} = \text{مس ا مس ب}$

س ۳۸

$\frac{\text{مس}^2\text{ا}}{\text{مس}^2\text{ب}} = \frac{\text{جم ب}(\text{جم د} - \text{جم ا})}{\text{جم ا}(\text{جم د} - \text{جم ب})}$ $\therefore \frac{\text{جم د} - \text{جم ا}}{\text{جم د} - \text{جم ب}}$

$= \frac{\text{مس}^2\text{ا . جم ا}}{\text{مس}^2\text{ب جم ب}} = \frac{\text{جب}^2\text{ا جم ب}}{\text{جب}^2\text{ب جم ا}}$

$\therefore \text{جم د} = \frac{\text{جب}^2\text{ب جم}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ا جم}^2\text{ب}}{\text{جب}^2\text{ب جم ا} - \text{جب}^2\text{ا جم ب}} =$

$\frac{(۱-\text{جم}^2\text{ب})\ \text{جم}^2\text{ا} - (۱-\text{جم}^2\text{ا})\ \text{جم}^2\text{ب}}{(۱-\text{جم}^2\text{ب})\ \text{جم ا} - (۱-\text{جم}^2\text{ا})\ \text{جم ب}}$

$= \frac{\text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}^2\text{ب}}{(\text{جم ا} - \text{جم ب})(۱ + \text{جم ا جم ب})} = \frac{\text{جم ا} + \text{جم ب}}{۱ + \text{جم ا جم ب}}$

$\therefore \frac{۱ - \text{جم د}}{۱ + \text{جم د}} = \frac{۱ + \text{جم ا جم ب} - \text{جم ا} - \text{جم ب}}{۱ + \text{جم ا جم ب} + \text{جم ا} + \text{جم ب}} =$

(۱ - جم ا)(۱ - جم ب) / (۱ + جم ا)(۱ + جم ب)

∴ مس² ج/۲ = مس² ا/۲ مس² ب/۲ بموجب دفعہ ۸۲

سوال ۵ — مس² ہ / مس² ہ̄ = مس² ا / مس² ا̄ لیکن مس² ہ = (۱ - جم ۲ ہ) / (جم ۲ ہ)

= (جم ب - جم ا) / (جم ا)

اور مس² ہ̄ = (۱ - جم ۲ ہ̄) / (جم ۲ ہ̄) = (جم ب - جم ا̄) / (جم ا̄) اسلئے

(جم ب - جم ا) / (جم ب - جم ا̄) . (جم ا̄) / (جم ا) = مس² ا / مس² ا̄

∴ (جم ب - جم ا) / (جم ب - جم ا̄) = (جب² ا جم ا̄) / (جب² ا̄ جم ا) ∴ جم ب =

(جب² ا̄ جم² ا - جب² ا جم² ا̄) / (جب² ا̄ جم ا - جب² ا جم ا̄)

= ((۱ - جم² ا̄) جم² ا - (۱ - جم² ا) جم² ا̄) / ((۱ - جم² ا̄) جم ا - (۱ - جم² ا) جم ا̄) =

= (جم² ا - جم² ا̄) / ((جم ا - جم ا̄)(۱ + جم ا جم ا̄)) = (جم ا + جم ا̄) / (۱ + جم ا جم ا̄) ∴

(۱ - جم ب) / (۱ + جم ب) = (۱ + جم ا جم ا̄ - جم ا - جم ا̄) / (۱ + جم ا جم ا̄ + جم ا + جم ا̄)

= (۱ - جم ا)(۱ - جم ا̄) / (۱ + جم ا)(۱ + جم ا̄) ∴ مس ب/۲ = مس ا/۲ مس ا̄/۲

سوال ۶ — جم ی = جم ا / جم ب/۲ اور جم ی̄ = جم ا̄ / جم ب/۲

١٨ ١ - جم ی = (جم ب - جم ا) / جم ب اور ١ - جم یَ = (جم بَ - جم ا) / جم بَ

٢ جب^٢ (ی/٢) = (جم ب - جم ا) / جم ب اور ٢ جب^٢ (یَ/٢) = (جم بَ - جم ا) / جم بَ

∴ ٤ جب^٢ (ی/٢) جب^٢ (یَ/٢) = (جم ب - جم ا)(جم بَ - جم ا) / جم ب جم بَ

اِسلئے جب^٢ ا = (جم ب - جم ا)(جم بَ - جم ا) / جم ب جم بَ

∴ جم ب جم بَ جب^٢ ا = جم ب جم بَ - جم ا (جم ب + جم بَ)

+ جم^٢ ا

∴ جم ب جم بَ جم^٢ ا = جم ا (جم ب + جم بَ) - جم^٢ ا

∴ جم ا (١ + جم ب جم بَ) = جم ب + جم بَ

∴ جم ا = (جم ب + جم بَ) / (١ + جم ب جم بَ) ∴ (١ - جم ا) / (١ + جم ا) =

(١ - جم ب)(١ - جم بَ) / (١ + جم ب)(١ + جم بَ) ∴ مس^٢ (ا/٢) = مس^٢ (ب/٢) مس^٢ (بَ/٢)

س ۴۲. ذیل کا نتیجہ ٹھیک ہے اگر مم ب - مم (ا + ھ) = مم ھ + مم (ا - ب)

یعنے اگر جم ب / جب ب - جم (ا + ھ) / جب (ا + ھ) = جم ھ / جب ھ + جم (ا - ب) / جب (ا - ب)

یعنے $\frac{\text{جم ب جم}(ا+ہ)\ \text{جم ب} - \text{جم}(ا+ہ)\ \text{جب ہ}}{\text{جب ب جب}(ا+ہ)}$ =

$\frac{\text{جب}(ا-ب)\ \text{جم ہ} + \text{جم}(ا-ب)\ \text{جب ہ}}{\text{جب ہ جب}(ا-ب)}$

یعنے اگر $\frac{\text{جب}(ا+ہ-ب)}{\text{جب ب جب}(ا+ہ)} = \frac{\text{جب}(ا-ب+ہ)}{\text{جب ہ جب}(ا-ب)}$

اور یعنے اگر جب ہ جب (ا - ب) = جب ب جب (ا + ہ)

اور یہہ فرضاً درست ہی +

س ۴۲ $\frac{(\text{مس ا} - \text{جم ہ مس ب})^{2}}{\text{جب}^{2}\text{ہ}} = \text{مس}^{2}\text{ا} - \text{مس}^{2}\text{ب}$ ∴

$(\text{مس ا} - \text{جم ہ مس ب})^{2} = (\text{ا} - \text{جم}^{2}\text{ہ})\ (\text{مس}^{2}\text{ا} - \text{مس}^{2}\text{ب})$

∴ $\text{مس}^{2}\text{ا} - ۲\ \text{جم ہ مس ا مس ب} + \text{جم}^{2}\text{ہ مس}^{2}\text{ب} =$

$(\text{ا} - \text{جم}^{2}\text{ہ})\ (\text{مس}^{2}\text{ا} - \text{مس}^{2}\text{ب})$

∴ $\text{مس}^{2}\text{ب} - ۲\ \text{جم ہ مس ا مس ب} + \text{جم}^{2}\text{ہ مس}^{2}\text{ا} = ٠$

یعنے $(\text{مس ب} - \text{جم ہ مس ا})^{2} = ٠$

∴ $\text{مس ب} - \text{جم ہ مس ا} = ٠$

∴ $\text{جم ہ} = \frac{\text{مس ب}}{\text{مس ا}}$ +

= {- جم ا + جم (ب - س)} {جم ا - جم (ب + س)}

= ۴ جب $\frac{ا+ب-س}{۲}$ جب $\frac{ا-ب+س}{۲}$ جب $\frac{ا+ب+س}{۲}$ جب $\frac{ب+س-ا}{۲}$

پس اگر مجوزہ جملہ صفر قرار دیا جاوے تو ۴ جیبون مندرجہ بالا مین سے ایک صفر ہونا چاہئے اور اسلئے ۴ زاویون مین سے ایک زاویہ صفر ہونا چاہئے یا دو زاویون قائمون کا کوئی ضعف +

س ۵۴ فرض کرو کہ ا = ۲ ہو ہر ایک مس مفروض کے تو اسوقت دریافت کرو عام قیمت تین کسرو کی

پس و = ک مس (θ + ا) اور ی = ک مس (θ + ب)

اور ج = ک مس (θ + س) تو اسلئے $\frac{و+ی}{و-ی}$ جب۲ (ا - ب)

= $\frac{مس (θ + ا) + مس (θ + ب)}{مس (θ + ا) - مس (θ + ب)}$ جب۲ (ا - ب)

= $\frac{جب (θ+ا) جم (θ+ب) + جب (θ+ب) جم (θ+ا)}{جب (θ+ا) جم (θ+ب) - جب (θ+ب) جم (θ+ا)}$ ۲ جب۲ (ا - ب)

= $\frac{جب (۲θ + ا + ب)}{جب (ا - ب)}$ جب۲ (ا - ب) = جب (۲θ + ا + ب)

جب (ا - ب)

= ½ {جم (۲θ + ۲ب) - جم (۲θ + ۲ا)} اسیطرح سے

$\frac{ی+ج}{ی-ج}$ جب۲ (ب - س) = ½ {جم (۲θ + ۲س)

- جم (۲θ + ۲ب)} +

س ۴۶

اور $\frac{\text{ج} + \text{د}}{\text{ج} - \text{د}}\ \text{جب}^2 (\text{س} - \text{ا})$

$= \frac{1}{2}\{\text{جم}(2\text{ہ} + 2\text{ا}) - \text{جم}(2\text{ہ} + 2\text{س})\}$

اسیطرح سے تینون رقمون کی جمع صفر ہے ✦

دویم درجہ کی مساوات کے بموجب $\text{جب}^2\text{ی} = \frac{\text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}{\text{جب}^2\text{ا}}$

اسلئے $\text{مس}^2\text{ی} = \frac{\text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}$

اول مساوات سے $\frac{\text{مس}^2\text{ہ}}{\text{مس}^2\text{ا}} + \frac{\text{جم}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}} = 1$

$\therefore \frac{\text{مس}^2\text{ہ}}{\text{مس}^2\text{ا}} = \frac{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ} - \text{جم}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}$

$= \frac{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ہ}}{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}} \quad \therefore \frac{\text{جب}^2\text{ہ}\ \text{جم}^2\text{ا}}{(\text{ا} - \text{جب}^2\text{ہ})\ \text{جب}^2\text{ا}}$

$= \frac{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ہ}}{\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}}$

$\therefore \text{جب}^2\text{ہ}\ \text{جم}^2\text{ا}\ (\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ب}\ \text{جب}^2\text{ہ}) = (\text{جب}^2\text{ا} - \text{جب}^2\text{ہ})$

$(\text{ا} - \text{جب}^2\text{ہ})\ \text{جب}^2\text{ا}$ ✦

$\therefore \text{جب}^4\text{ہ}\ (\text{جب}^2\text{ا} + \text{جم}^2\text{ا}\ \text{جب}^2\text{ب}) - \text{جب}^2\text{ہ}\ (\text{جم}^2\text{ا}$

$\text{جب}^2\text{ا} + \text{جب}^2\text{ا} + \text{جب}^4\text{ا}) + \text{جب}^4\text{ا} = 0$

$\therefore \text{جب}^4\text{ہ}\ (\text{ا} - \text{جم}^2\text{ا}\ \text{جم}^2\text{ب}) - 2\ \text{جب}^2\text{ہ}\ \text{جب}^2\text{ا} + \text{جب}^4\text{ا} = 0$

اس جملہ کو حل کرنے سے جو کچھ کہ مطلوب ہے، وہ حاصل ہو سکتا ہے

جب۲ ہ = ۱ ± جم ا . جم ب / ۱ - جم۲ ا - جم۲ ب = ۱ - جب۲ ا = حب۲ ا / ۱ ± جم ا جم ب

س ۳

جب { ہ - ب - (ا - ب) } / جب (ہ - ب) = ا / ب

∴ جب (ہ - ب) جم (ا - ب) - جم (ہ - ب) جب (ا - ب) / جب (ہ - ب) = ا / ب

∴ جم (ا - ب) - جب (ا - ب) مم (ہ - ب) = ا / ب

پھر جم { ہ - ب - (ا - ب) } / جم (ہ - ب) = اَ / بَ

∴ جم (ہ - ب) جم (ا - ب) + جب (ہ - ب) جب (ا - ب) / جم (ہ - ب) = اَ / بَ

∴ جم (ا - ب) + مس (ہ - ب) جب (ا - ب) = اَ / بَ

اسلئے جب (ا - ب) مم (ہ - ب) جب (ا - ب) مس (ہ - ب)

= { جم (ا - ب) - ا / ب } { اَ / بَ - جم (ا - ب) }

∴ جب۲ (ا - ب) = - ا اَ / ب بَ + (ا / ب + اَ / بَ) . جم

(ا - ب) - جم۲ (ا - ب)

∴ ۱ + ا اَ / ب بَ = (ا / ب + اَ / بَ) جم (ا - ب)

∴ جم (ا - ب) = ا اَ + ب بَ / ا بَ + اَ ب -

مش ۴۹

$\text{مس ی} = \frac{\text{۲مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}}}{\text{۱ - مس}^{\text{۲}}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}}}$ اسطرح $\frac{\text{۲مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}}}{\text{۱ - مس}^{\text{۲}}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}}}$

$= \frac{\text{جب}\ \theta'\ \text{جم}\ \theta}{\text{جب}\ \theta + \text{جم}\ \theta'}$

$\therefore \text{۲مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}}\ (\text{جب}\ \theta' + \text{جم}\ \theta) = (\text{۱ - مس}^{\text{۲}}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}})\ \text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta'$

$\therefore \text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta'\ \text{مس}^{\text{۲}}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}} + \text{۲مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}}\ (\text{جب}\ \theta' + \text{جم}\ \theta)$

$= \text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta'$ +

$\text{مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}} = \frac{-(\text{جب}\ \theta' + \text{جم}\ \theta) \pm (\text{۱} + \text{جب}\ \theta'\ \text{جم}\ \theta)}{\text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta'}$

اوپر کے مثال کو دیکھو اسطرح

$\text{مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}} = \frac{(\text{۱ - جب}\ \theta')\ (\text{۱ - جم}\ \theta)}{\text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta}$

اب $\frac{\text{۱ - جم}\ \theta}{\text{جب}\ \theta} = \frac{\text{۲جب}^{\text{۲}}\ \frac{\theta}{\text{۲}}}{\text{۲جب}\ \frac{\theta}{\text{۲}}\ \text{جم}\ \frac{\theta}{\text{۲}}} = \text{مس}\ \frac{\theta}{\text{۲}}$ اور اسطرح

$\frac{\text{۱ - جب}\ \theta'}{\text{جم}\ \theta} = \frac{\text{۱ - جم}\ (\frac{\pi}{\text{۲}} - \theta')}{\text{جب}\ (\frac{\pi}{\text{۲}} - \theta')} = \text{مس}\ (\frac{\pi}{\text{۴}} - \frac{\theta'}{\text{۲}})$

اسی طرح $\text{مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}} = \text{مس}\ \frac{\theta}{\text{۲}}\ \text{مس}\ (\frac{\pi}{\text{۴}} - \frac{\theta'}{\text{۲}})$ اسیطرح سے

نچلی رقم سے ہم اسکو دریافت کرسکتے ہین +

$\text{مس}\ \frac{\text{ی}}{\text{۲}} = -\text{مم}\ \frac{\theta}{\text{۲}}\ \text{مم}\ (\frac{\pi}{\text{۴}} - \frac{\theta'}{\text{۲}})$ حاصل جمع ۲ قیمتوںکا

س ۹۴

مس ی/۲ = ± ۱ ✣

جم θ = جم ا جم ب ∴ (۱ − جم θ)/(۱ + جم θ) = (۱ − جم ا جم ب)/(۱ + جم ا جم ب)

∴ مس² θ/۲ = (۱ − جم ا جم ب)/(۱ + جم ا جم ب) ∴ اسطرح سے مس² θ/۲ =

(۱ − جم اَ جم ب)/(۱ + جم اَ جم ب) ✣

(۱ − جم ا جم ب)(۱ − جم اَ جم ب)/(۱ + جم ا جم ب)(۱ + جم اَ جم ب) = مس² ب/۲ = (۱ − جم ب)/(۱ + جم ب)

∴ (۱ − (جم ا جم اَ) جم ب + جم ا جم اَ جم² ب)/(۱ + (جم ا جم اَ) جم ب + جم ا جم اَ جم² ب) = (۱ − جم ب)/(۱ + جم ب)

∴ ((جم ا + جم اَ) جم ب)/(۱ + جم ا جم اَ جم² ب) = جم ب

∴ جم ا + جم اَ = ۱ + جم ا جم اَ (۱ − جب² ب)

∴ جب² ب جم ا جم اَ = ۱ − جم ا − جم اَ + جم ا جم اَ

= (۱ − جم ا)(۱ − جم اَ) ∴ جب² ب = (۱/جم ا − ۱)(۱/جم اَ − ۱)

= (قع ا − ۱)(قع اَ − ۱) ✣

س ۵۰

جب (س + ا − ب) − جب (ب + س − ا) = جب

(ا + ب − س) − جب (س + ا − ب)

∴ ۲ جب (ا − ب) جم س = ۲ جب (ب − س) جم ا

∴ (جب ا جم ب - جم ا جب ب) جم س = (جب ب جم س - جم ب جب س) جم ا تقسیم کرو جم ا جم ب جم س پر

اسیطرح مس ا - مس ب = مس ب - مس س ∴ مس ا اور مس ب اور مس س بھی سلسلہ حسابیہ مین ہین +

س ۵۱ فرض کرو جب ا اور جب ب اور جب س سلسلہ جمع وتفریق مین ہون

پس جب ب - جب ا = جب س - جب ب

اسیطرح ۲ جب $\frac{ب - ا}{۲}$ جم $\frac{ب + ا}{۲}$ = ۲ جب $\frac{س - ب}{۲}$ جم $\frac{س + ب}{۲}$

∴ جب $\frac{ب - ا}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$ = جب $\frac{س - ب}{۲}$ جب $\frac{ا}{۲}$

∴ (جب $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{ا}{۲}$ - جم $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{ا}{۲}$) جب $\frac{س}{۲}$

= (جب $\frac{س}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$ - جم $\frac{س}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$) جب $\frac{ا}{۲}$

تقسیم کرو اسکو جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$ پر

اسیطرح مم $\frac{ا}{۲}$ - مم $\frac{ب}{۲}$ = مم $\frac{ب}{۲}$ - مم $\frac{س}{۲}$

اسیطرح مم $\frac{س}{۲}$ اور مم $\frac{ب}{۲}$ اور مم $\frac{ا}{۲}$ سلسلہ جمع وتفریق مین ہین

س ۵۲ فرض کرو جم^{۲}ا + جم^{۲}ب + جم^{۲}س = ۱

∴ ۳ - جب^{۲}ا - جب^{۲}ب - جب^{۲}س = ۱

∴ جب^{۲}ا + جب^{۲}ب + جب^{۲}س = ۲

۵۳ ∴ مثال کہ بموجب جم ا جم ب جم س = ۰ تین زاویون مین سے ایک زاویہ قائمہ ہے اور یہہ تمام زاویون سے بڑا ہوگا ٭

فرض کرو کہ یہہ زاویہ ا ہو یا ا = ۹۰°

∴ ب + س = ۹۰° = ا ∴ ا − س = ب ٭

س ۵۳

جب (ا + س/۲) = جب (ا + (۱۸۰° − ا − ب)/۲)

= جب (۹۰° − (ب − ا)/۲) = جم (ب − ا)/۲

اور جب س/۲ = جم (ا + ب)/۲

اسیطرح جم (ب − ا)/۲ = ن جم (ا + ب)/۲

∴ جم ا/۲ جم ب/۲ + جب ا/۲ جب ب/۲ = ن (جم ا/۲ جم ب/۲ − جب ا/۲ جب ب/۲)

∴ (ن + ۱) جب ا/۲ جب ب/۲ = (ن − ۱) جم ا/۲ جم ب/۲

∴ (جب ا/۲ جب ب/۲) / (جم ا/۲ جم ب/۲) = (ن − ۱)/(ن + ۱) پس اسلئے مس ا/۲ مس ب/۲ = (ن − ۱)/(ن + ۱)

س ۵۴

فرض کرو کہ ک/ا قیمت ظاہر کرتا ہے جب ا/ب اور جب ب/ی اور جب س/لا کے ٭

پھر و = ک جب ا اور ی = ک جب ب اور لا =
ک جب س

∴ (و - ی) مم س/۲ = ک (جب ا - جب ب) مم س/۲

= ۲ک جب ½ (ا - ب) جم ½ (ا + ب) مم س/۲

= ۲ک جب ½ (ا - ب) جب س/۲ مم س/۲

= ۲ک جب ½ (ا - ب) جم س/۲

= ۲ک جب ½ (ا - ب) جب ½ (ا + ب)

= ۲ک {جب² ½ ا - جب² ½ ب} بموجب دفعہ ۲۷

اسیطرح (ی - لا) جم ا/۲ = ۲ک {جب² ½ ب - جب² ½ س}

اور {لا - و} مم ب/۲ = ۲ک {جب² ½ س - جب² ½ ا}

اور حاصل جمع ان تینوں کا صفر ہے ∴

س ۵۵

مس (ا + ب + س) = مس π = ۰ اور اس لئے
۱۰۲ دفعہ کے بموجب ∴

مس ا + مس ب + مس س - مس ا مس ب مس س = ۰

س ۵۶

جب (۲ا + د) + جب (۲ب + د) = ۲ جب
(ا + ب + د) جم (ا - ب)

جب (۲ص + د) - جب (۲ا + ۲ب + ۲ص + ۳د)

= -۲ جب (ا + ب + د) جم (ا + ب + ۲ص +

+ ۲د) ہے ∴

۲ جب (ا + ب + د) {جم (ا - ب) - جم (ا + ب +

۲ص + ۲د)}

= ۲ جب (ا + ب + د) ۲ جب (ب + ص + د)

جب (ا + ص + د)

= ۴ جب (ا + ب + د) جب (ب + ص + د)

جب (ص + ا + د)

س ۵۷

اگر د = ۰ تو جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲س - جب

(۲ا + ۲ب + ۲س)

= ۴ جب (ا + ب) جب (ب + س) جب

(س + ا)

اگر پھر ا + ب + س = π اور جب (۲ا + ۲ب

+ ۲س) = ۰

پھر جب (ا + ب) = جب س اور جب (ب + س)

= جب ا اور جب (س + ا) = جب ب

پس جب ۲ا + جب ۲ب + جب ۲س = ۴ جب
س جب ا جب ب

اگر د = π/۲

تو جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س + جم (۲ا + ۲ب
+ ۲س) =

۴ جم (ا + ب) جم (ب + س) جم (س + ا)

اگر ا + ب + س = π/۲ اور جم (۲ا + ۲ب + ۲س)
= -۱

تو پھر جم (ا + ب) = جب س اور جم (ب + س)
= جب ا اور جم (ی + ا) = جب ب

پس جم ۲ا + جم ۲ب + جم ۲س - ۱
= ۴ جب ا جب ب جب س ٭

ش ۵۸

۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲ = ۲ جم س/۲ {جم ½ (ا - ب)
+ جم ½ (ا + ب)}

= جم ½ (س + ا - ب) + جم ½ (س + ب - ا) +
جم ½ (ا + ب + س) + جم ½ (ا + ب - س)

= جب ا + جب ب + جب س − جم ½ (ا + ب + س)

− جم ½ (ب + س − ا)

− جم ½ (ا + س − ب) − جم ½ (ا + ب − س)

پھر ۲ جب (ا + ب + س − π)/۴ جم (۳ا − ب − س + π)/۴ = جب ا

+ جب (ب + س − ا − π)/۲ .

= جب ا − جم (ب + س − ا)/۲

پس ۲ جب (ا + ب + س − π)/۴ جم (۳ب − ا − س + π)/۴

= جب ب − جم (ا + س − ب)/۲

اور ۲ جب (ا + ب + س − π)/۴ جم (ا + ب + ۳س − π)/۴

= جب (ا + ب + س − π)/۲

= − جم (ا + ب + س)/۲

س ۵۹

جم ۵θ = جم (۳θ + ۲θ)

= جم ۳θ جم ۲θ − جب ۳θ جب ۲θ ۰

حل سوالات باب نہم

س ۱

فرضکرو کہ پ س ج = ا پس ج پ م = $\frac{1}{2}$ ا
اور پ ا م = $\frac{1}{2}$ ا

پھر $\frac{\text{م ج}}{\text{پ م}}$ = مس $\frac{1}{2}$ ا اور $\frac{\text{پ م}}{\text{ا م}}$ = مس $\frac{1}{2}$ ا

پس مس² $\frac{1}{2}$ ا = $\frac{\text{م ج}}{\text{پ م}} \cdot \frac{\text{پ م}}{\text{ا م}} = \frac{\text{م ج}}{\text{ا م}}$ =

$\frac{\text{م ج}}{\text{ا م}} = \frac{\text{س ب} - \text{س م}}{\text{س ا} + \text{س م}}$

= $\frac{\text{س پ} - \text{س م}}{\text{س پ} + \text{س م}} = \frac{1 - \frac{\text{س م}}{\text{س پ}}}{1 + \frac{\text{س م}}{\text{س پ}}} = \frac{1 - \text{جم ا}}{1 + \text{جم ا}}$

س ۲

جم ہ = $\frac{\text{ا جم و} - \text{ب}}{\text{ا} - \text{ب جم و}}$ ∴ اسلئے

$\frac{1 - \text{جم ہ}}{1 + \text{جم ہ}} = \frac{\text{ا} - \text{ب جم و} - \text{ا جم و} + \text{ب}}{\text{ا} - \text{ب جم و} + \text{ا جم و} - \text{ب}}$ =

$\frac{(\text{ا} + \text{ب})(1 - \text{جم و})}{(\text{ا} - \text{ب})(1 + \text{جم و})}$

∴ مس² $\frac{ہ}{2}$ = $\frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ا} - \text{ب}}$ مس² $\frac{و}{2}$

∴ $\frac{\text{مس}^2 \frac{ہ}{2}}{\text{مس}^2 \frac{و}{2}} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ا} - \text{ب}}$ ×

س ۳

جم ۲ θ = ۱ / (۱ + مس۲ θ) = ۱ / (۱ + ۴مس۲ د + ۱) = ۱ / (۲ (۱ + ۲مس۲ د))

= ½ جم۲ د اور جم ۲ θ = ۲ جم۲ θ − ۱ = جم۲ د − ۱ −

جب۲ د ∴

∴ جم ۲ θ + جب۲ د = ۰

س ۴

قع ۲ θ = ۲ قع θ قم θ ∴ ۱ / جم ۲ θ = ۲ / جم θ جب θ

∴ ۱ = ۲ جم ۲ θ / جم θ جب θ

∴ ۱ / جب ۲ θ = ۲ جم ۲ θ / جب ۲ θ جم θ جب θ = جم ۲ θ / جب θ جم ۲ θ

= (جم۲ θ − جب۲ θ) / جب θ جم ۲ θ = ۱ / جب θ − ۱ / جم ۲ θ

اسی طرح قسم ۲ θ = قم ۲ θ − قع θ +

س ۵

مس (θ − د) = (مس θ − مس د) / (۱ + مس θ مس د) = (ن − ۱) مس د / (۱ + ن مس۲ د)

= (ن − ۱) / (قم د + ن مس د)

∴ مس۲ (θ − د) = (ن − ۱)۲ / (قم۲ د + ۲ن + ن۲ مس۲ د) = (ن − ۱)۲ / ((ن مس د − قم د)۲ + ۴ن)

$$= \frac{\text{جب}\left(\frac{ا+ب}{۲} - ب\right) + \text{جب ب جم } \tfrac{۱}{۲}(ا+ب)}{\text{جب } \tfrac{۱}{۲}(ا+ب) \text{ جم ب}}$$

$$\frac{\text{جب } \tfrac{۱}{۲}(ا+ب) \text{ جم ب}}{\text{جب } \tfrac{۱}{۲}(ا+ب) \text{ جم ب}} = ۱$$

ش ۸

فرض کرو د = ارتفاع گز د ن کے پھر $\frac{د}{۱۲۰}$ = مس اَ

∴ د = ۰۰۲ × ۰۱۰ مس اَ پر تقریباً قیمت مس اَ = پیمائش دایرہ کی اَ یعنے $\frac{\pi}{۶۰ \times ۱۸۰}$ کے

∴ د = ۰۰۲ × ۰۱۰ × $\frac{\pi}{۶۰ \times ۱۸۰}$ تقریباً ۔

ش ۹

فرض کرو کہ د = فاصلہ انجن کے اسلئے $\frac{۳}{د}$ = مس ۱۰″

$\frac{۳}{د} = \frac{\pi}{۳۶ \times ۱۸۰}$ ∴ د = $\frac{۱۸۰ \times ۱۲}{\pi}$

ش ۱۰

۳ جب ا − ۴ جب³ ا = ن جب ا جیساکہ ہم خیال کرتے ہین کہ ا نہ تو صفر ہے اور نہ دو زاویہ قایمون مین ضرب کہایا ہوا ہے ہم اسکو جب ا پر تقسیم کرتے ہین اسیطرح

۳ − ۴ جب² ا = ن ∴ جب ا = $\frac{۳ - ن}{۴}$ اور یہہ اور ر عدد اور صفر کے درمیان واقع ہے اور ن واقع ۳ اور ۱ کے درمیان اگر ن = ۲ کے ہو تو جب² ا = $\frac{۱}{۴}$ = جب² $\frac{\pi}{۶}$ ∴ ا = م π ± $\frac{\pi}{۶}$ جہان م صفر یا کوئی دوسرا عدد ہے ۔

مس ۱۱

$$\text{مس}\,(ا - ب) = \frac{\text{مس}\,ا - \text{مس}\,ب}{1 + \text{مس}\,ا\ \text{مس}\,ب}$$

$$= \frac{\text{مس}\,ا - \dfrac{\text{ن جب}\,ا\ \text{جم}\,ا}{1 - \text{ن جب}^2\,ا}}{1 + \text{مس}\,ا \cdot \dfrac{\text{ن جب}\,ا\ \text{جم}\,ا}{1 - \text{ن جب}^2\,ا}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,ا\,(1 - \text{ن جب}^2\,ا) - \text{ن جب}\,ا\ \text{جم}^2\,ا}{\text{جم}\,ا\,(1 - \text{ن جب}^2\,ا) + \text{ن جب}^2\,ا\ \text{جم}\,ا}$$

$$= \frac{\text{جب}\,ا - \text{ن جب}\,ا}{\text{جم}\,ا} = \frac{(1 - \text{ن})\ \text{جب}\,ا}{\text{جم}\,ا} = (1 - \text{ن})\ \text{مس}\,ا$$

مس ۱۲

زاویون کا ایک سا ہی جب ہوتا ہی جیسا کہ ۳ ھ اس قاعدہ ن π + (-۱)ن ۳ ھ مین شامل ہین اسلیئے کوہی مثال جسکی مس ھ کی قیمت جب ۳ ھ کی صورتین دیکھا دی تو امید کیجا سکتی ہے کہ ہر ایک زاویہ کے مس کی قیمت قاعدہ مس ۱/۳ {ن π + (-۱)ن ۳ ھ} کے متعلق ہے ۶ م اور ۶ م + ۱ اور ۶ م + ۲ اور ۶ م + ۳ اور ۶ م + ۴

اور ۶ م + ۵ اصلی قیمت مس ۱/۳ {ن π + (-۱)ن ۳ ھ}

بموجب دفعہ ۴۵ +

مس ھ اور مس (π/۳ - ھ) اور مس (۲ π/۳ + ھ) اور

مس (π - ھ) اور مس (π + π/۳ + ھ) اور مس

(π + ۲ π/۳ - ھ) ہمکو اسیطرح ھم چہہ قیمتین دریافت

کرسکتے ہین بموجب دفعہ ۴۰۰ ۵۰ اسیطرح ہے

∓ مس θ اور ∓ مس (π/۴ + θ)

اور ∓ مس (۳π/۴ + θ)

س ۱۳

جم۲ ا = ½ (۱ + جم ۲ ا) اسلئے

جم۴ ا = ¼ (۱ + ۲ جم ۲ ا + جم۲ ۲ ا)

= ¼ + ½ جم ۲ ا + (۱ + جم ۴ ا)/۸

= ۳/۸ + ½ جم ۲ ا + ⅛ جم ۴ ا اسیطرح

جب۲ ا = ½ (۱ − جم ۲ ا)

∴ جب۴ ا = ¼ (۱ − ۲ جم ۲ ا + جم۲ ۲ ا)

= ۳/۸ − ½ جم ۲ ا + ⅛ جم ۴ ا)

∴ جم۸ ا + جب۸ ا

= (۳/۸ + ½ جم ۲ ا + ⅛ جم ۴ ا)۲ + (۳/۸ − ½ جم ۲ ا + ⅛ جم ۴ ا)۲

= ۲ {(۳/۸)۲ + (½ جم ۲ ا)۲ + (⅛ جم ۴ ا)۲ + ۲ · ۳/۸ × ⅛ جم ۴ ا}

= ۲ {۹/۶۴ + ¼ جم۲ ۲ ا + ۱/۶۴ جم۲ ۴ ا + ۳/۳۲ جم ۴ ا}

= ۹/۳۲ + ¼ (۱ + جم ۴ ا) + ۱/۶۴ (۱ + جم ۸ ا) + ۳/۱۶ جم ۴ ا

= ۱/۶۴ {جم ۸ ا + ۲۸ جم ۴ ا + ۳۵}

س ۱۴

جم θ جم د = −۱ چونکہ جم کسی زاویہ کا شمار میں اکائی سے کبھی زیادہ نہیں

ہوتا اسلئے ضرور ہے کہ جم ا اور جم ب دونون شمار مین اکائی کے برابر ہون اور ایک اونمین سے مثبت ہو اور دوسرا منفی اسلئے اون زاویون مین سے ایک زاویہ صفر ہونا چاہئے یا جفت ضعف π کا اور دوسرا طاق ضعف π کا

س ۱۵

جب² ا + جب² ب − ۲ جب ا جب ب جم (ا − ب)

= جب ا {جب ا − جب ب جم (ا − ب)} + جب ب {جب ب − جب ا جم (ا − ب)}

= جب ا {جب (ا − ب + ب) − جب ب جم (ا − ب)} + جب ب {جب (ا − ا − ب) − جب ا جم (ا − ب)}

= جب ا جب (ا − ب) جم ب − جب ب جم ا جب (ا − ب)

= جب (ا − ب) {جب ا جم ب − جب ب جم ا} = جب² (ا − ب)

اسیطرح جب² (ا − ب) = ن² جب² (ا + ب)

∴ جب (ا − ب) = ± ن جب (ا + ب)

∴ جب ا جم ب − جم ا جب ب = ± ن (جب ا جم ب + جم ا جب ب)

تقسیم کیا گیا جم ا جم ب سے اسیطرح مس ا − مس ب = ± ن (مس ا + مس ب)

∴ (ا ± ن) مس ا = (ا ± ن) مس ب ٭

∴ مس ا = $\frac{۱ \pm ن}{۱ \mp ن}$ مس ب ✣

س ۱۶

$\frac{\text{جب}\ ۴\theta\ \text{مم}\ \theta}{\text{جق}\ ۲\theta\ \text{مم}^{۲}\ \theta} = \frac{\text{جب}\ ۴\theta\ \text{جب}^{۲}\ ۲\theta\ \text{جم}\ \theta}{(۱ - \text{جم}\ ۲\theta)\ \text{جم}^{۲}\ ۲\theta\ \text{جب}\ \theta}$

$= \frac{۲\ \text{جب}^{۳}\ ۲\theta\ \text{جم}\ ۲\theta\ \text{جم}\ \theta}{۲\ \text{جب}^{۲}\ \theta\ \text{جم}^{۲}\ ۲\theta\ \text{جب}\ \theta} = \frac{۲\ (۲\ \text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta)^{۳}\ \text{جم}\ \theta}{۲\ \text{جب}^{۳}\ \theta\ \text{جم}\ ۲\theta} = \frac{۸\ \text{جم}^{۴}\ \theta}{\text{جم}\ ۲\theta}$

اگر θ = ۰ تو اسکی قیمت ۸ ہے ✣

س ۱۷

جب θ + جم θ = $\sqrt{۲}$ ∴ $\frac{\text{جب}\ \theta}{\sqrt{۲}} + \frac{\text{جم}\ \theta}{\sqrt{۲}} = ۱$

∴ جم $(\theta - \frac{\pi}{۴}) = ۱$ ∴ $\theta - \frac{\pi}{۴} = ۲$ ن π

س ۱۸

$\sqrt{۳}$ جب θ − جم θ = $\sqrt{۲}$ ∴ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جب θ − $\frac{۱}{۲}$ جم θ

$= \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

∴ $\frac{۱}{۲}$ جم θ − $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ جب θ = $-\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

∴ جم $(\theta + \frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ∴ $\theta + \frac{\pi}{۳} = ۲$ ن π

$\pm\ \frac{۳\pi}{۴}$ ✣

س ۱۹

جب ۲θ = جم θ ∴ جم $(\frac{\pi}{۲} - ۲\theta)$ = جم θ ∴

$\frac{\pi}{۲} - ۲\theta$ اور θ زاوئے ہین وہی جم رکھتے ہین اسلئے

تمام زاوی شامل ہین $\frac{\pi}{۲} - ۲\theta = ۲$ ن π ± θ

س ۲۰

جم θ − جم ۲θ = جب ۳θ ∴ ۲ جب $\frac{۳\theta}{۲}$ جب $\frac{\theta}{۲}$

= ۲ جب $\frac{۳\theta}{۲}$ جم $\frac{۳\theta}{۲}$

سوال ۲۱

∴ جب $\frac{3\theta}{2}$ = ۰ اور جب $\frac{\theta}{2}$ = جم $\frac{3\theta}{2}$

اگر جب $\frac{3\theta}{2}$ = ۰ اور پھر $\frac{3\theta}{2} = n\pi$

اگر جب $\frac{\theta}{2}$ = جم $\frac{3\theta}{2}$ اور پھر جم $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)$ = جم $\frac{3\theta}{2}$

اس لئے $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = 2n\pi \mp \frac{3\theta}{2}$

(۳ − م²) (قع θ + قم θ) =

۴ (جب θ مس θ + جم θ ظم θ)

∴ (۳ − م²) $\left(\frac{1}{\text{جم}\,\theta} + \frac{1}{\text{جب}\,\theta}\right)$

= ۴ $\left(\frac{\text{جب}^2\theta}{\text{جم}\,\theta} + \frac{\text{جم}^2\theta}{\text{جب}\,\theta}\right)$

∴ (۳ − م²) (جب θ + جم θ) = ۳ (جب³ θ + جم³ θ)

= ۳ (جب θ + جم θ) (جب² θ + جم² θ − جب θ جم θ)

∴ یا جب θ + جم θ = ۰ یا (۳ − م²) = ۳ (۱ − جب θ جم θ)

اگر جب θ + جم θ = ۰ اور پھر جب θ = − جم θ ∴ مس θ = −۱

∴ $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}$

اگر ۳ − م² = ۳ (۱ − جب θ جم θ) اور پھر

م² = ۳ جب θ جم θ = $\frac{3}{2}$ جب ۲θ

س ۲۲

∴ جب ۲θ = $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ∴ ۲θ = ن π + (−۱)^ن $\frac{\pi}{۳}$

θ/۲ − مس θ = جم θ + جب θ ∴ جم θ/جب θ − جب θ/جم θ

= جم θ + جب θ

∴ جم^۲ θ − جب^۲ θ = جب θ جم θ (جم θ + جب θ)

∴ یا جم θ + جب θ = ۰ یا جم θ − جب θ

= جب θ جم θ

اگر جب θ + جم θ = ۰ پھر جب θ = − جم θ

∴ مس θ = −۱

∴ θ = ن π + $\frac{۳\pi}{۴}$

اگر جم θ − جب θ = جب θ جم θ تب مربع سے

۱ − ۲ جب θ جم θ = جب^۲ θ جم^۲ θ

∴ ۱ − جب ۲θ = $\frac{\text{جب}^۲ ۲\theta}{۴}$ +

س ۲۳

۲ جب^۲ θ + جب^۲ ۲θ = ۲ ∴ جب^۲ ۲θ = ۲ − ۲

جب^۲ θ = ۲ (۱ − جب^۲ θ) ∴ ۴ جب^۲ θ جم^۲ θ = ۲ جم^۲ θ

∴ یا جم^۲ θ = ۰ یا جب^۲ θ = $\frac{۱}{۲}$

اگر جم^۲ θ = ۰ پھر θ = ن π + $\frac{\pi}{۲}$ اگر جب^۲ θ = $\frac{۱}{۲}$

تو جب^۲ θ = جب^۲ $\frac{\pi}{۴}$

+ اس مساوات کے معمولی طور پر حل کرنے سے ہمکو جب ۲θ = −۲ ± ۲√۲ حاصل ہوتا ہے اسجگہ اوپر کی علامت لینی چاہیئے کیونکہ نیچے کی علامت سے جب ۲θ شمار مین اکائی سے بڑا ہو جائیگا +

∴ $\theta =$ ن $\pi \mp \frac{\pi}{۴}$ ۔

س ۲۴

∴ مس θ + ۲ مم ۲θ = جب θ (۱ + مس θ مس $\frac{\theta}{۲}$)

∴ $\frac{\text{جب}\ \theta}{\text{جم}\ \theta} + \frac{۲}{\text{جب}\ ۲\theta}$ = جب $\theta \left(۱ + \frac{\text{جب}\ \theta\ \text{جب}\ \frac{\theta}{۲}}{\text{جم}\ \theta\ \text{جم}\ \frac{\theta}{۲}}\right)$

∴ $\frac{\text{جب}^۲\theta + \text{جم}\ ۲\theta}{\text{جب}\ \theta\ \text{جم}\ \theta}$ = جب $\theta \cdot \frac{\text{جم}\ (\theta - \frac{\theta}{۲})}{\text{جم}\ \theta\ \text{جم}\ \frac{\theta}{۲}} = \frac{\text{جب}\ \theta}{\text{جم}\ \theta}$

∴ جب$^۲ \theta$ + جم ۲θ = جب$^۲ \theta$، اسواسطے جم ۲θ = ۰

∴ $\theta =$ ن $\pi + \frac{\pi}{۴}$

س ۲۵

∴ جب^۲ ۲θ − جب$^۲ \theta$ = جب$^۲ \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۴}$ ∴

∴ ۴ جب$^۲ \theta$ جم$^۲ \theta$ − جب$^۲ \theta = \frac{۱}{۴}$ ∴ ۴ جب$^۲ \theta$ (۱ − جب$^۲ \theta$) − جب$^۲ \theta$

∴ ۴ جب$^۴ \theta$ − ۳ جب$^۲ \theta + \frac{۱}{۴}$ = ۰ ۔ عام طور سے حل

کرنے سے جب$^۲ \theta = \frac{۳ \mp \sqrt{۵}}{۸}$ اور ایک طرف دیکھو کہ

جب$^۲ \theta$ = جب$^۲ \frac{۳\pi}{۱۰}$

اور اس لئے θ = ن $\pi \mp \frac{۳\pi}{۱۰}$ دوسری طرف دیکھو

جب$^۲ \theta$ = جب$^۲ \frac{\pi}{۱۰}$ ∴ θ = ن $\pi \mp \frac{\pi}{۱۰}$

س ۲۶

قم θ = قم $\frac{\theta}{۲}$ ∴ $\frac{۱}{\text{جب}\ \theta} = \frac{۱}{\text{جب}\ \frac{\theta}{۲}}$

∴ جب $\frac{\theta}{۲}$ = جب θ ∴ جب $\frac{\theta}{۲}$ =

۲ جب $\frac{\theta}{۲}$ جم $\frac{\theta}{۲}$ ۔

∴ یا جب $\frac{\theta}{۲}$ = ۰ یا جم $\frac{\theta}{۲}$ = $\frac{۱}{۲}$

اگر جب $\frac{\theta}{۲}$ = ۰ تو پہر $\frac{\theta}{۲}$ = ن π

اگر جم $\frac{\theta}{۲}$ = $\frac{۱}{۲}$ تو پہر $\frac{\theta}{۲}$ = ۲ م $\pi \pm \frac{\pi}{۳}$

س ۲۷

جم θ جم ۳θ = جم ۵θ جم ۷θ ∴

∴ جم ۴θ + جم ۲θ = جم ۱۲θ + جم ۲θ

∴ جم ۴θ = جم ۱۲θ ∴ ۱۲θ = ۲ ن $\pi \pm$ ۴θ

اوپر کی علامت کے لینے سے ہمنے حاصل کیا θ = $\frac{۲ن\pi}{۸}$ = $\frac{ن\pi}{۴}$

اور نیچے کی علامت کے لینے سے θ = $\frac{۲ن\pi}{۱۶}$ = $\frac{ن\pi}{۸}$

مگر یہہ بات ظاہر ہی کہ پہلا جملہ دوسری جملہ مین شامل ہے +

س ۲۸

جب θ جب ۳θ = $\frac{۱}{۴}$

∴ جب θ (۳ جب θ − ۴ جب^{۳} θ) = $\frac{۱}{۴}$

∴ ۴ جب^{۴} θ − ۳ جب^{۲} θ + $\frac{۱}{۴}$ = ۰، عام طریقہ پر

حل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہین +

جب^{۲} θ = $\frac{۳ \pm ۱}{۸}$ = $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{۴}$ +

اگر جب^{۲} θ = $\frac{۱}{۲}$ تو جب^{۲} θ = جب^{۲} $\frac{\pi}{۴}$

اور θ = ن $\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

اگر جب^{۲} θ = $\frac{۱}{۴}$ تو جب^{۲} θ = جب^{۲} $\frac{\pi}{۶}$

اور θ - = ن π ∓ π/٦

پانچوین فصل کی پانچوین مثال کو دیکھو +

مس ٢٩

٤ جب² θ + جب² ٢θ = ٣ ∴ ٤ جب² θ + ٤ جب² θ (١ - جب² θ) = ٣

∴ ٤ جب⁴ θ - ٨ جب² θ + ٣ = ٠ عام طور سے حل کرنے سے ہم حاصل کرتے ہین +

جب² θ = ½ یا ³⁄٢ اور پچھلی قیمت صرف بیفایدہ ہے اسیطرح

جب² θ = جب² π/٤

∴ θ = ن π ± π/٤

مس ٣٠

(١ - مس θ) (١ + جب ٢θ) = ١ + مس θ

اور اسلئے (١ - جب θ / جم θ) (جب θ + جم θ)² = ١ + جب θ / جم θ

∴ (جم θ - جب θ) (جم θ + جب θ)² = جم + جب θ

∴ یا جم θ + جب θ = ٠

اور یا (جم θ - جب θ) (جم θ + جب θ) = ١

اگر جم θ + جب θ = ٠ تو جب θ = - جم θ

∴ مس = -١ ∴ θ = ن π + ³π/٤

اگر (جم θ - جب θ) (جم θ + جب θ) = ١ یعنے

$\text{جم}^۲\theta - \text{جب}^۲\theta = ۱$

$\therefore$ جم $۲\theta = ۱ \therefore ۲\theta = ۲$ ن π +

س ۱۳

جب θ + جب ۲θ + جب ۳θ + جب $۴\theta = ۰$

$\therefore$ جب θ + جب ۴θ + جب ۲θ + جب $۳\theta = ۰$

$\therefore ۲$ جب $\frac{۵\theta}{۲}$ جم $\frac{۳\theta}{۲}$ + ۲ جب $\frac{۵\theta}{۲}$ جم $\frac{\theta}{۲} = ۰$

$\therefore ۲$ جب $\frac{۵\theta}{۲}$ (جم $\frac{۳\theta}{۲}$ + جم $\frac{\theta}{۲}$) $= ۰$

$\therefore ۴$ جب $\frac{۵\theta}{۲}$ جم $\frac{\theta}{۲}$ جم $\theta = ۰$

اسیطرح یہان تین حالتین ہین اگر جب $\frac{۵\theta}{۲} = ۰$

تو $\frac{۵\theta}{۲} =$ ن π

اگر جم $\frac{\theta}{۲} = ۰$ تو $\frac{\theta}{۲} =$ ن $\pi + \frac{\pi}{۲}$

اگر جم $\theta = ۰$ تو $\theta =$ ن $\pi + \frac{\pi}{۲}$

س ۱۴

جب θ − جم $\theta = ۴$ جب θ $\text{جم}^۲\theta$

$\therefore$ جب $\theta - ۴$ جب θ $(۱ - \text{جب}^۲\theta)$ = جم θ

$\therefore ۴$ $\text{جب}^۳\theta - ۳$ جب θ = جم θ

$\therefore$ جم θ = − جب ۳θ = جم $(۳\theta + \frac{\pi}{۲})$

$\therefore ۳\theta + \frac{\pi}{۲} = ۲$ ن $\pi \pm \theta$

س ۱۵

(مم θ − مس $\theta)^۲$ (۲ − ما) = ۴ (۲ + ما)

س ۴۳

∴ (جم ٥ / جب ٥ − جب ٥ / جم ٥)² = ۴(۲ + √۳) / (۲ − √۳)

∴ ((جم² ٥ − جب² ٥) / (۲ جب ٥ جم ٥))² = (۲ + √۳) / (۲ − √۳) =

(۲ + √۳)² / ((۲ + √۳)(۲ − √۳))

∴ (جم ۲٥ / جب ۲٥)² = (۲ + √۳)²

∴ جم² ۲٥ = جم² π/۱۲

∴ ۲٥ = ن π ± π/۱۲

۲ √۳ جم (π/۴ − ٥) (۱ + جب ٥) = ۱ + جم ۲٥

∴ ۲ √۳ جم (π/۴ − ٥) (۱ + جب ٥) = ۲ جم² ٥

= ۲ (۱ − جب² ٥)

∴ یا ۱ + جب ٥ = ۰ یا √۳ جم (π/۴ − ٥) =

۱ − جب ٥

اگر ۱ + جب ٥ = ۰ تو جب ٥ = −۱

∴ ٥ = ن π + (−۱)ⁿ ۳π/۲

جو کہ بیہ ظاہراً برابر ہے (۴م + ۳) π/۲

اگر √۳ جم (π/۴ − ٥) = ۱ − جب ٥

تو ۱۳ ($\frac{۱}{۱۳}$ جم θ + $\frac{۱}{۱۳}$ جب θ) = ۱ ـ جب θ

∴ ۲ جب θ = ۱ − جم θ

∴ ۴ جب $\frac{θ}{۲}$ جم $\frac{θ}{۲}$ = ۲ جب^{۲} $\frac{θ}{۲}$ ∴ یا جب

$\frac{θ}{۲}$ = ۰ یا مس $\frac{θ}{۲}$ = ۲

اگر جب $\frac{θ}{۲}$ = ۰ تو $\frac{θ}{۲}$ = ن π اگر مس $\frac{θ}{۲}$ = ۲

تو $\frac{θ}{۲}$ = ن π + α

جہانکہ ایسا α ہے کہ مس α = ۲

س ۳۵

جب ۹θ + جب ۵θ ـ ۲ جب^{۲} θ = ۱

∴ ۲ جب ۷θ جم ۲θ = ۱ − ۲ جب^{۲} θ = جم ۲θ

∴ یا جم ۲θ = ۰ یا جب ۷θ = $\frac{۱}{۲}$

اگر جم ۲θ = ۰ تو ۲θ = ن π + $\frac{π}{۲}$

اگر جب ۷θ = $\frac{۱}{۲}$ تو ۷θ = ن π + (−۱)^{ن} $\frac{π}{۶}$ ۔

باب دہم

س۱ فرض کرو کہ و = لوکارثم ۱۲۸ اسلئے
۱۲۸ = (∛۴)^و یعنی ۲^۷ = ۲^{۲و/۳}
∴ ۲و/۳ = ۷ ∴ و = ۲۱/۲

س۲ فرض کرو کہ و = لوکارثم تو اسلئے
۳۲ = (∜۹)^و یعنی ۳^۵ = ۳^{۲و/۴} یعنی
۵ + ۱/۲ = و/۲

اسلئے و/۲ = ۱۱/۲ ∴ و = ۲۲/۲

س۳ فرض کرو کہ و = لوکارثم ۲۱۸۷ لوگ تو ۲۱۸۷ = ۳^و
یعنی ۳^۷ = ۳^و ∴ و = ۷

فرض کرو کہ و = ۰۰۰۱ لوگ تو ۰۰۰۱ = ۱۰^و
یعنی ۱/۱۰^۴ = ۱۰^و یعنی ۱۰^{-۴} = ۱۰^و یعنی و = −۴
فرض کرو کہ و = جم ۵۴ لوگ تو جم ۵۴ = ۲^و
یعنی ۲^{۱/۲} / ۲^۲ ... = ۲^و یعنی ۲^{-۳/۲} = ۲^و ∴ و = −۳/۲

س۴ ۵^{۶−۴و} = ۲^{و+۳} ∴ (۶ − ۴و) لوگ۵ = (و + ۳)

لوگ ۲ -

∴ (۲ - ۴ و) لوگ ۲ = (و + ۳) لوگ ۲

∴ (۶ - ۴ و) (۱ - لوگ ۲) = (و + ۳) لوگ ۲

∴ و (۴ - ۳ لوگ ۲) = ۶ - ۹ لوگ ۲ ∴ و = (۶ - ۹ لوگ ۲) / (۴ - ۳ لوگ ۲) =

۳٫۲۹۰۷۳ / ۳٫۰۹۶۹۱ = ۱٫۰۶

س ۵ — اسکو فرض کرو کہ ا = ۴٫۲۲ ، لوگ = لوگ ۴۲۲۴ / ۱۰۰۰

= لوگ (۷ × ۳۲) / ۱۰۰۰

= لوگ ۷ + ۵ لوگ ۲ - ۳

اور ب = لوگ ۵٫۱۲۵ = لوگ ۱۰۰۰ / ۸

= ۳ - ۳ لوگ ۲

دوسرے درجہ کی مساوات سے لوگ ۲ = ⅓ (۳ - ب) اور

پہلے درجہ کی مساوات سے

لوگ ۷ = ا + ۳ - ۵/۳ (۳ - ب)

س ۶ — ۲٫۲۵ واقع ہے درمیان ۱۰ اور ۱۰۰ کے اور اس لئے

لوگارثم ۲٫۲۵ کا تا عدہ ۱ اور ۳ ہے تب لوگ

(۱۰٫۲۵)^{۱/۵} = ۱/۵ لوگ ۱۰٫۲۵ = ۱/۵ لوگ ...

اور $\frac{۲۵}{۱۰۰۰۰}$ ،۰۷ اور $\frac{۱}{۳۶}$ اور $\frac{۱}{۲}$ کے درمیان واقع ہے +

یعنے درمیان $\frac{۱}{۲}$ اور $\frac{۲}{۴}$

اور $\frac{۱}{۵}$ لوگ $\frac{۲۵}{۱۰۰۰۰}$ ،۰۷ اسکا قاعدہ ۲ واقع ہے

درمیان $-\frac{۱}{۵}$ اور $-\frac{۲}{۵}$ کے اور اسطرح سے جزو صحیح

∴ اہوگا اور فرض کرنے سے کسر اعشاریہ لوکارثم کا ساڈ

ہوگا +

ش لوگ ۵۰.۴ = لوگ (۱۸ × ۵) = لوگ (۱۸ × $\frac{۱۰}{۲}$)

= لوگ $\frac{۳^۴ \times ۱۰}{۲}$

= ۴ لوگ ۳ + ۱ − لوگ ۲

∴ ۴ لوگ ۳ = لوگ ۵۰.۴ + لوگ ۲ − ۱ =

۸۱۹۰۸۴۸۵

∴ لوگ ۳ = ۴۷۷۱۲۱۲ء

ش لوگ ۹۸ = لوگ (۲ × ۷^۲) = لوگ ۲ + ۲ لوگ ۷

=۳۰۱۰۳۰ء + ۱ء۶۹۰۱۹۶ = ۱ء۹۹۱۲۲۶

لوگ $\left(\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوگ $\frac{۴}{۳^{\frac{۳}{۲}}}$ = $\frac{۱}{۲}$ لوگ $\frac{۲^۲}{۳^{\frac{۳}{۲}}}$ = $\frac{۱}{۲}$ (۲ لوگ ۲ − $\frac{۳}{۲}$ لوگ ۳) ∴

س ٩

= ٠٫٧١١٦٦٦٩ = ٣٫٣٣٣٣٠ آ

لوگ (٣٦٫٠٠٢٠٦)^(١/٣) = ١/٣ لوگ (٣٦٫٠٠٢٠٦) =

= ١/٣ لوگ ٣٦٠٠٢٠٦ / ١٠^٥ = ١/١٢ لوگ ٣^٤ ٢^٨ / ١٠^٤ =

١/١٢ {٤ لوگ ٣ + ٨ لوگ ٢ − ٤} = − ٣٤٤٤٣٩١

= ١٫١٠٥٥٧

س ١٠

٢/لا٣ = ١/لا٢ − ١/لا٣ و ٣/لا٤ = ١/لا٣ − ١/لا٤ و ٤/لا٥ = ١/لا٤ − ١/لا٥ یہی سلسلہ =

١/لا١ − ١/لا٢ + ١/لا٣ − ١/لا٤ + ١/لا٥ ۔۔۔۔ = ی^(-١)

س ١١

١/لا٢ = ١×٢/لا٢ · ١/٢ = ١/٢

اور (١+٢)/لا٣ = ٢×٣/لا٣ · ١/٢ = ١/١ · ١/٢

(١+٢+٣)/لا٤ = ٣×٤/لا٤ · ١/٢ = ١/لا٢ · ١/٢

(١+٢+٣+٤)/لا٥ = ٤×٥/لا٥ · ١/٢ = ١/لا٣ · ١/٢

اور عموماً (١+٢+٣+۔۔۔+ن)/لا(ن+١) = ن(ن+١)/لا(ن+١) · ١/٢ = ١/لا(ن−١) · ١/٢

اور اسیطرح سے یہہ سلسلہ

= ١/٢ {١ + ١/١ + ١/لا٢ + ١/لا٣ + ۔۔۔} = ی/٢

س ١٢

٢ جب د جب (د − ا) = ٢ جم ا − ١

∴ ٢ {جم ا − جم (٢د − ا)} = ٢ جم ا − ١

∴ جم (٢د − ا) = ١/٢ ∴ ٢د − ا = ٢ن π ± π/٣

س ١٣

جم ب √(ا٢ - و٢) = و جب ب - ا جب ا

∴ جم٢ ب (ا٢ - و٢) = و٢ جب٢ ب - ٢ و ا

جب ب جب ا + ا٢ جب٢ ا

∴ و٢ - ٢ و ا جب ب جب ا = ا٢ جم٢ ب - ا٢

جب٢ ا

∴ (و - ا جب ب جب ا)٢ = ا٢ جم٢ ب - ا٢ جب٢

ا + ا٢ جب٢ ب جب٢ ا = ا٢ جم٢ ب - ا٢ جب٢ ا

جم٢ ب = ا٢ جم٢ ب جم٢ ا

∴ و - ا جب ب جب ا = ∓ ا جم ب جم ا

∴ و = ا (جب ب جب ا ∓ جم ب جم ا) = ا جم (ب - ا)

یا - ا جم (ب + ا)

س ١٤

جب ا + جب (و - ا) + جب (٢ و + ا) = جب

(و + ا) + جب (٢ و - ا)

∴ جب ا = جب (و + ا) - جب (و - ا) + جب

(٢ و - ا) - جب (٢ و + ا)

= ٢ جب ا جم و - ٢ جب ا جم ٢ و

∴ ا = ٢ جم و - ٢ جم ٢ و = ٢ جم و - ٢ (٢ جم٢ و - ١)

∴ ۴ جب^{۲} د − ۲ جم د − ۱ = ۰ عام طریقہ پر حل کرنے
سے ہم حاصل کرتے ہین جم د = $\frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۴}$
اوپر کی علامت لینے سے جم د = جم $\frac{\pi}{۵}$ اور اسلئے د = ۲ن $\pi \pm \frac{\pi}{۵}$
اور نیچے کی علامت لینے سے جم د = جم $\frac{۳\pi}{۵}$ اور اسلئے د =
۲ن $\pi \pm \frac{۳\pi}{۵}$ ۔

س ۱۵

جم (د + $\frac{۳}{۲}$) ا + جم (د + $\frac{۱}{۲}$) ا جب ا

∴ ۲ جم (د + ۱) ا جم $\frac{۱}{۲}$ ا = جب ا = ۲ جب $\frac{۱}{۲}$ ا جم $\frac{۱}{۲}$ ا

∴ جم (د + ۱) ا = جب $\frac{۱}{۲}$ ا = جم ($\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۲}$ ا)

اسجگہہ تمام مثائین شامل رکھتے ہین خطوط وحدانی (د + ۱) ا
= (۲ن $\pi \pm$ ($\frac{\pi}{۲} - \frac{۱}{۲}$ ا)

س ۱۶

د^{۲} جم ا جم (ا − $\frac{ب}{۲}$) + د جم (ا − ب) = ۲ جم $\frac{ب}{۲}$

∴ د^{۲} + $\frac{\text{د جم (ا − ب)}}{\text{جم ا جم (ا − ب/۲)}}$ = $\frac{\text{۲ جم ب/۲}}{\text{جم ا جم (ا − ب/۲)}}$

∴ $\left\{\text{د} + \frac{\text{جم (ا − ب)}}{\text{۲ جم ا جم (ا − ب/۲)}}\right\}^{۲}$ = $\frac{\text{۲ جم ب/۲}}{\text{جم ا جم (ا − ب/۲)}}$ +
$\frac{\text{جم}^{۲}\text{ (ا − ب)}}{\text{۴ جم}^{۲}\text{ ا جم}^{۲}\text{ (ا − ب/۲)}}$

$$= \frac{\text{جم}^{۲}(\text{ا}-\text{ب}) + ۸\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})}{۴\,\text{جم}^{۲}\,\text{ا}\,.\,\text{جم}^{۲}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})} =$$

$$= \frac{\text{جم}^{۲}(\text{ا}-\text{ب}) + ۴\,\text{جم}\,\text{ا}\left\{\text{جم}\,\text{ا} + \text{جم}(\text{ا}-\text{ب})\right\}}{۴\,\text{جم}^{۲}\,\text{ا}\,\text{جم}^{۲}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})}$$

$$= \frac{\left\{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) + ۲\,\text{جم}\,\text{ا}\right\}^{۲}}{۴\,\text{جم}^{۲}\,\text{ا}\,\text{جم}^{۲}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})}$$

$$\therefore \text{و} + \frac{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}{۲\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})} = \pm \frac{\text{جم}(\text{ا}-\text{ب}) + ۲\,\text{جم}\,\text{ا}}{۲\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})}$$

اوپر کی علامت لینے سے $\text{و} = \frac{۲\,\text{جم}\,\text{ا}}{۲\,\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})} = \text{قع}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})$

اور نیچے کی علامت لینے سے $\text{و} = -\frac{\text{جم}\,\text{ا} + \text{جم}(\text{ا}-\text{ب})}{\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})}$

$= -\frac{۲\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جم}\,\text{ا}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})} = -۲\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{قع}\,\text{ا}$ مساوات سے

حل کرنے سے ✦

$$\text{و}\,\text{جم}\,\text{ا}\left\{\text{و}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})-۱\right\} + ۲\left\{\text{و}\,\text{جم}(\text{ا}-\frac{\text{ب}}{۲})-۱\right\}\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲} = ۰$$

اور یہہ واضح ہے کہ دونون قیمتین و کی ظاہر ہین ✦

مث ۱۷

$\text{مم}\,\frac{\text{و}}{۲}^{-۱}\,\text{ا} - \text{مم}\,\frac{\text{و}}{۲}\,\text{ا} = \text{قم}\,۳\,\text{ا}$ اور فرض کرو کہ

$\text{ی} = \frac{\text{و}}{۲}^{-۱}\,\text{ا}$ اور استطیع $\text{مم}\,\text{ی} - \text{مم}\,۲\,\text{ی} = \text{قم}\,۳\,\text{ا}$

∴ $\frac{\text{جم ی}}{\text{جب ی}} - \frac{\text{جم ۲ی}}{\text{جب ۲ی}}$ = قم ۳ا

∴ $\frac{\text{جب (۲ی − ی)}}{\text{جب ی جب ۲ی}}$ = قم ۳ا = $\frac{1}{\text{جب ۳ا}}$

∴ جب ۲ی = جب ۳ا یعنے جب ۲ا = جب ۳ا

عموماً ۲ا = ن π + (−۱)^ن ۳ا

س ۱۸

م جتی θ = ن جتی (ا − θ)

∴ م (۱ − جم θ) = ن {۱ − جم (ا − θ)}

∴ ۲ م جب² $\frac{θ}{2}$ = ۲ ن جب² $\frac{ا − θ}{2}$

∴ جب $\frac{ا − θ}{2}$ = $\left(\frac{م}{ن}\right)^{\frac{1}{2}}$ جب $\frac{θ}{2}$

∴ جب $\frac{ا}{2}$ جم $\frac{θ}{2}$ − جم $\frac{ا}{2}$ جب $\frac{θ}{2}$ = $\left(\frac{م}{ن}\right)^{\frac{1}{2}}$ جب $\frac{θ}{2}$ تقسیم کرو جم $\frac{θ}{2}$ پر تو اسلئے مساوات سادہ سے مس $\frac{θ}{2}$ کے برابر ہم حاصل کرتے ہین +

س ۱۹

جم ن θ + جم (ن − ۲) θ = جم θ

∴ ۲ جم (ن − ۱) θ جم θ = جم θ ∴ یا جم θ = ۰ یا جم (ن − ۱) θ = $\frac{1}{2}$

اگر جم θ = ۰ تو θ = م π + $\frac{π}{2}$

اگر جم (ن − ۱) θ = $\frac{1}{2}$ تو (ن − ۱) θ = ۲ م π ± $\frac{π}{3}$

س ۲۰

جب θ + جب ۳ θ = جب ۲ θ + جب ۴ θ

∴ ۲ جب ۲ θ جم θ = ۲ جب ۳ θ جم θ ∴ یا جم θ = ۰

یا جب ۲ θ = جب ۳ θ

اگر جم θ = ۰ تو θ = ن π + $\frac{\pi}{2}$ اگر جب ۲ θ = جب ۳ θ

اور جب ۲ θ - جب ۳ θ = ۰

∴ ۲ جب $\frac{\theta}{2}$ جم $\frac{5\theta}{2}$ = ۰ ∴ جب $\frac{\theta}{2}$ = ۰ یا جم $\frac{5\theta}{2}$ = ۰

اگر جب $\frac{\theta}{2}$ = ۰ تو $\frac{\theta}{2}$ = ن π اگر جم $\frac{5\theta}{2}$ = ۰ تو

$\frac{5\theta}{2}$ = ن π + $\frac{\pi}{2}$

سات قیمتین جو کہ صفر سے بڑی ہین اور ۲ π سے

کم ہین وہ یہہ ہین *

$\frac{\pi}{5}$ اور $\frac{3\pi}{5}$ اور $\frac{5\pi}{5}$ اور $\frac{7\pi}{5}$ اور $\frac{9\pi}{5}$ اور

$\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{3\pi}{2}$

س ۲۱

مس د = مس ب مس (د + ا) = $\frac{\text{مس ب (مس د + مس ا)}}{\text{۱ - مس د مس ا}}$

∴ مس د (۱ - مس د مس ا) = مس ب (مس د + مس ا)

∴ مس^2 د مس ا + (مس ب - ۱) مس د + مس ا مس ب = ۰

(مس ب - ۱)^2 - ۴ مس^2 ا مس ب = ۰

اور (مس ب - ۱)^۲ - ۴ مس^۲ ۱ مس ب = مس^۲ ب -

۲ مس ب - ۴ مس^۲ ۱ مس ب + ۱

= {مس ب - (۱ + ۲ مس^۲ ۱)}^۲ - (۱ + ۲ مس^۲ ۱)^۲ + ۱

= {مس ب - $\frac{۱ + جب^۲ ۱}{جم^۲ ۱}$}^۲ - $\frac{۴ جب^۲ ۱}{جم^۴ ۱}$ =

{مس ب - $\frac{۱ + جب^۲ ۱}{جم^۲ ۱}$ - $\frac{۲ جب ۱}{جم^۲ ۱}$}

× {مس ب - $\frac{۱ + جب^۲ ۱}{جم^۲ ۱}$ + $\frac{۲ جب ۱}{جم^۲ ۱}$}

= {مس ب - ($\frac{۱ + جب ۱}{جم ۱}$)^۲} {مس ب - ($\frac{۱ - جب ۱}{جم ۱}$)^۲}

اسکا جواب = ۰ ہے

اور اسلئے مس ب درمیان ($\frac{۱ - جب ۱}{جم ۱}$)^۲ اور

($\frac{۱ + جب ۱}{جم ۱}$)^۲ واقع ہے +

مس ۲۲ مس ($\frac{\pi}{۴}$ - ۵) + مس ($\frac{\pi}{۴}$ + ۵)

$$= \frac{\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)} + \frac{\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

$$= \frac{\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + \text{جب}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{\pi}{2}}{\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)} = \frac{1}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\text{جم}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$

$$= \frac{2}{\text{جب}\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)} = \frac{2}{\text{جم}\,2\theta}$$

اسلئے $\frac{2}{\text{جم}\,2\theta} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{\text{جم}\,2\theta}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \text{جم}^2\,2\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$

$\therefore 2\,\text{جم}^2\,2\theta - 1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \text{جم}\,4\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{جم}\,\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ θ کی اخیر قیمت دیگئی اسلئے $4\theta = \frac{\pi}{4}$

س ۲۳

$\text{جب}^2\,(ن+1)\,\theta = \text{جب}^2\,ن\,\theta + \text{جب}^2\,(ن-1)\,\theta$

$\therefore \text{جب}^2\,(ن+1)\,\theta - \text{جب}^2\,(ن-1)\,\theta = \text{جب}^2\,ن\,\theta$

$\therefore \text{جب}\,2ن\,\theta\;\text{جب}\,2\theta = \text{جب}^2\,ن\,\theta$ بموجب دفعہ ۸۲

س ۴۲

∴ (ن + ۱) θ + (ن + ۱) θ + ن θ = π

∴ ۳ ن θ = π اور ن θ = π/۳ ∴ جب ۲ θ

= جب ۲π/۳ = جب π/۳ ∴ جب ۲ θ =

جب π/۳ اسی طرح ۲ θ = π/۳ اور θ =

π/۶ لیکن ن θ = π/۳ ∴ ن = ۲

جم³ θ − جم³ ا = ۲ جم³ θ (جم θ − جم ا) −

۲ جب³ θ (جب θ − جب ا)

∴ جم ۲ θ − جم ۲ ا = (جم ۳ θ + ۳ جم θ)/۲ (جم θ − جم ا)

− (۳ جب θ − جب ۳ θ)/۲ (جب θ − جب ا)

∴ ۲ (جم ۲ θ − جم ۲ ا) = جم ۳ θ جم θ + جب ۳ θ

جب θ − جم ۳ θ جم ا − جب ۳ θ جب ا

+ ۳ جم² θ − ۳ جب² θ − ۳ جم θ جم ا   + ۳

جب θ جب ا

∴ جم (۳ θ − θ) − جم (۳ θ − ا) − ۳ جم (θ + ا)

= ۳ جب² θ − جم² θ − ۲ جم² ا

∴ جم ۲ θ − جم (۳ θ − ا) − ۳ جم (θ + ا) = −۳ −

۳ جم ۲ θ − ۲ جم² ا

= ۳ - ۲ (۱ + جم ۲ ه) - (۱ + جم ۲ ۱)

= - ۲ جم ۲ ه - جم ۲ ۱

∴ ۳ جم ۲ ه - ۳ جم (ه + ۱) - جم (۳ ه - ۱) +

جم ۲ ۱ = ۰

∴ ۴ جب (۳ ه + ۱)/۲ جب (ه - ۱)/۲ + جب (۳ ه + ۱)/۲

جب (۳ ۱ - ۳ ه)/۲ = ۰

∴ جب (۳ ه + ۱)/۲ {جب ۳ (ه - ۱)/۲ - ۳ جب (ه - ۱)/۲} = ۰

∴ ۴ جب (۳ ه + ۱)/۲ جب ۳ (ه - ۱)/۲ = ۰

اسجگہہ یا جب (۳ ه + ۱)/۲ = ۰ یا جب (ه - ۱)/۲ = ۰

پہلے دیا ہوا (۳ ه + ۱)/۲ = ن π اور دوسرا دیا ہوا

= (ه - ۱)/۲ = ن π

س ۲۵ ه ظاہر کرتا ہے اوس زاویہ کو جسپر نشان ۱ کا ہے

پس جب ه = جب ۱ اسیطرح جم (ه - π/۲)

= جم (π/۲ - ۱) ∴ تمام مثالین

مقابلہ کی گئی ہین ه - π/۲ = ۲ ن π ∓ (π/۲ - ۱)

س ۲۶ ه نشان ظاہر کرتا ہے اوس زاویہ کو جسپر نشان

۱ کا ہے

پس جم ɵ = جم ۱ اسیطرح جب (ɵ − $\frac{\pi}{۲}$) = جب

(۱ − $\frac{\pi}{۲}$) اسیطرح سے تمام رقمین مقابلہ کی گئی ہین

ɵ − $\frac{\pi}{۲}$ = ن π + (−۱)^ن (۱ − $\frac{\pi}{۲}$)

مش ۲۷

۱۰۱ دفعہ کے بموجب ظاہر کرتا ہے کہ اوپر کے علامت لینی چاہیے

اگر $\frac{۱}{۲}$ واقع ہو درمیان ن ۱۸۰° + ۳۰° ۲۵ اور

ن ۱۸۰° + ۵۰° ۱۴ اس حالت مین ۱ واقع ہے

درمیان ۲ ن ۱۸۰° + ۳۰° ۵۴ اور ۲ ن ۱۸۰° + ۳۰° ۱۰۸ اور

۱ + ۰ ۲۶° واقع ہے درمیان ۲ ن ۱۸۰° + ۳۰° + ۶۰° ،

اور ۲ ن ۱۸۰° + ۳۰° ۱۰۸ اور اسلئے $\frac{۲۶۰ + ۱}{۳۶۰}$

واقع ہین درمیان ۲ ن + ۲ اور ۲ ن + ۳ کے

مش ۲۸

اسلئے معلوم ہوا کہ اگر کسر کا صحیح حصہ صرف تعدادی ہو لیس اسکی قیمت م متقرر ہو

فرض کرو کہ ۱ من گتاؤ درجون کی ہے وہ واقع ہو درمیان ن

۱۸۰ ۳ اور ن ۱۸۰ + ۹۰ تو مس ۱ اور مس $\frac{۱}{۲}$

دونون مثبت ہین اور اسلئے اوپر کی علامت کی دونون

حالتین ہوسکتی ہین +

نیز اس حالت مین $\frac{۹۰ + ۱}{۱۸۰}$ واقع ہے درمیان $\frac{۹۰ + ۳۶۰ ن}{۱۸۰}$

م کرنے سے ہمکو یہہ شکل حاصل ہوتی (−۱)^م

بعینہ اسی طریقہ سے ہم معلوم کرسکتے ہین کہ یہہ مثال دفعہ ۱۰۱ سے ملتی ہو جبکہ یقین کرم طاقت ہو

اور $\frac{ن ۳۶۰ + ۱۸۰}{۱۸۰}$

یعنے واقع ہے درمیان ۲ن + $\frac{۱}{۲}$ اور ۲ن + ۱ کے

پس اس سے معلوم ہوا کہ م مثبت ہو اب یہہ فرض کرو کہ ا مین درجونکی تعداد

درمیان ن ۳۶۰ + ۹۰ اور ن ۳۶۰ + ۱۸۰ کے ہے +

اس حالتمین مس ا مقدار منفی ہوگا اور مس $\frac{۱}{۲}$ ا صحیح اور مثبت

اسلئے نیچے کی علامت کو شتباہ مین رکھنا چاہئے اور نیز اسی حالتمین $\frac{ا + ۹۰}{۱۸۰}$ درمیان

۲ن + ۱ اور ۲ن + ۲ کے واقع ہو پس سطح سوم کی قیمت طاق ہوگی - اور اسیطرح

ہم آگے اور مسئل کرسکتے ہین اگر ا مین درجونکی تعداد ن ۳۶۰ + ۱۸۰ اور ن ۳۶۰

+ ۲۷۰ کے درمیان یا ن ۳۶۰ + ۲۷۰ اور ن ۳۶۰ + ۳۶۰ کے درمیان واقع ہو

س ۲۹

اگر مس (مم د) = مم (مس د) اسلئے مس (مم د)

$= مس \{ \frac{\pi}{۲} - مس د \}$

∴ دفعہ ۶ کے بموجب جو سوال جنکا حاصل ہونا ممکن ہے وہ تمام اس شکل مین آسکتے ہین

$مم د = ن \pi + \frac{\pi}{۲} - مس د$

$\therefore مم د + مس د = ن \pi + \frac{\pi}{۲}$

$\therefore \frac{جم د}{جب د} + \frac{جب د}{جم د} = ن \pi + \frac{\pi}{۲}$

$\therefore \frac{۱}{جب د \; جم د} = \frac{\pi(۲ن + ۱)}{۲}$

$\therefore جب د \; جم د = \frac{۲}{\pi(۲ن + ۱)}$

$\therefore جب ۲ د = \frac{۴}{\pi(۲ن + ۱)}$ قیمت ن کی = −۱

معلوم ہوا کہ اس مثال اور آئندہ مثال مین کسی شکل مین بڑی بڑی کسر سے وہ کسر مراد ہوتی ہے
جو کہ ایک مثبت کسر کے ساتھ بلکہ تمام سوال کو بنالی ہے - یا ہم مثال کو اسطرح بیان کرسکتے ہین

$‡ \; \overline{۱ + مس ا} = ‡ = \frac{۱}{\overline{جم ۲ ا}} ‡ = \frac{۱}{جم ا}$ ‡

جوکہ بناتا ہے جب ۲ و بڑی بہ نسبت ایک عدد واحد کے

سن ۳

$2\,\text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = 1 + \text{جم}\,\text{ا}$

$\therefore\ 4\,\text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = 2 + 2\,\text{جم}\,\text{ا}$

$\therefore\ 2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{2 + 2\,\text{جم}\,\text{ا}}$

$\therefore\ 2\,\text{جم}^2\,\tfrac{1}{4}\text{ا} = 1 + \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا}$

$\therefore\ 4\,\text{جم}^2\,\tfrac{1}{4}\text{ا} = 2 + 2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا}$

$\therefore\ 2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{4}\text{ا} = \sqrt{2 + 2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا}} = \left\{2 + (2 + 2\,\text{جم}\,\text{ا})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

اسیطرح $2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{8}\text{ا} = \left[2 + \left\{2 + (2 + 2\,\text{جم}\,\text{ا})^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

سن ۱۱

و کو اسکے ساتھ بدلو $\frac{\pi}{4}$ - و اور $\frac{\pi}{4}$ + و اسطرح پر

$\text{جم}\left(\frac{\pi}{4} - \text{و}\right) = \pm \left\{\tfrac{1}{2}\left(1 + \text{جم}\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\text{و}\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{جب}\,2\,\text{و}}{2}}$

اور $\text{جم}\left(\frac{\pi}{4} + \text{و}\right) = \pm \left\{\tfrac{1}{2}\left(1 + \text{جم}\left(\frac{\pi}{2} + 2\,\text{و}\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{جب}\,2\,\text{و}}{2}}$

تب جم $\left(\frac{\pi}{4} - \text{و}\right)$ اور جم $\left(\frac{\pi}{4} + \text{و}\right)$ ان کی قیمت برابر

ہے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم و + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب و

$= \pm \sqrt{\frac{1 + \text{جب}\,2\,\text{و}}{2}} \ \ldots\ldots (1)$

اور $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جم و - $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب و $= \pm \sqrt{\frac{1 - \text{جب}\,2\,\text{و}}{2}} \ \ldots\ldots (2)$

یہاں تفریق کرنے سے ہم قیم مطلوب جب و کو لیکر معلوم کرسکتے ہیں ✦

پہلی مساوات مین اوپر کی یا نیچے کی علامت جو یا مثبت یا منفی ہے بطور جم (و - $\frac{\pi}{2}$) لی گئی ہے +

یعنے یہہ برابر ہے و - $\frac{\pi}{2}$ کو جو واقع ہے درمیان ۲ ن $\pi - \frac{1}{2}\pi$ اور ۲ن $\pi + \frac{1}{2}\pi$ کے +

یا درمیان ۲ ن $\pi + \frac{1}{2}\pi$ اور ۲ ن $\pi + \frac{3\pi}{2}$ کے

اسیطرح ہم علامت دوسری مساوات کی ظاہر کر سکتے ہین +

فرض کرو کہ ک ظاہر کرتا ہے قیمت اون تمام عددون کے جو θ کے برابر ہین +

پس $\frac{ا\ جم\ (\theta + ا) + ب\ جب\ (\theta + ب)}{ا\ جب\ (\theta + ا) + ب\ جم\ (\theta + ب)} =$ ک تو

(ا جم (θ + ا) + ب جب (θ + ب) =

= ک {ا جب (θ + ا) + ب جم (θ + ب)}

.. جم θ (ا جم ا + ب جب ب) + جب θ (ب جم ب - ا جب ا) =

= ک جم θ (ا جب ا + ب جم ب) + ک جب θ

(اَ جم ا - ب حب ب)

∴ جم ہ {ا جم ا + ب حب ب - ک (اَ جب ا + بَ
جسمب)}

+ جب ہ {ب جم ب - ا جب ا — ک (اَ جم ا —
بَ جب ب)} = ۰

اب یہہ تمام قیمت = ہ کے صحیح ہے
ہ کو بجاے صفر اور $\frac{\pi}{2}$ کے فرض کرو
اسلئے ہم ذیل مین دو نتیجے نکال لیتے ہین ۰

ا جم ا + ب جب ب = ک (اَ جب ا + بَ جم ب)

ب جم ب - ا جب ا = ک (اَ جم ا - بَ جب ب)

اور یہ ظاہر ہے کہ اگر یہہ رقمین وہی قیمت ظاہر کرین تو
ضرب کرنے سے ہم حاصل کرتے ہین (ا جم ا + ب جب ب)

(اَ جم ا - بَ جب ب)

= (اَ جب ا + بَ جم ب) (ب جم ب - ا جب ا)

∴ ا اَ جم^۲ ا - ب بَ جب^۲ ب +

+ (اَ ب — ا بَ) جم ا جب ب

= ب بَ جم^۲ ب - ا اَ جب^۲ ا + (اَ ب - ا بَ) جب ا جم ب

اور مم ب مم س اور مم س — مم ا

تمام مخفا ہو جائین اور تب قیمت اسکی ایک اکائی کے

برابر ہوگی

س ۳۶

$$\text{مم ب} + \text{مم س} - \text{مم ا} = \frac{\text{جم ب}}{\text{جب ب}} + \frac{\text{جم س}}{\text{جب س}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$

$$= \frac{\text{جب (ب + س)}}{\text{جب ب جب س}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب جب س}} - \frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}}$$

$$= \frac{\text{جب}^2\text{ ا} - \text{جب ب جب س جم ا}}{\text{جب ا جب ب جب س}}$$

اسجگہ اسطرح حل کرنے سے ہم پاتے ہین کہ ان دو دئی ہوی

مثالونکا فرق برابر ہے ایک کسر کے جسکا مخرج +

جب ا جب ب جب س ہو اور شمار کنندہ

$\text{جب}^2\text{ ا} + \text{جب}^2\text{ ب} + \text{جب}^2\text{ س} - \text{جب ب جب س}$

$- \text{جب س جب ا} - \text{جب ا جب ب}$ ہو

یعنی $\frac{1}{2}(\text{جب ا} - \text{جب ب})^2 + \frac{1}{2}(\text{جب ب} - \text{جب س})^2$

$+ \frac{1}{2}(\text{جب س} - \text{جب ا})^2$

یہہ مثال منفی کبھی نہین ہوگی +

س ۳۷

فرضکرو کہ ا اور ب اور س تین زاویہ حادہ ہین

اسطرح سے کہ

جم^{2} ا + جم^{2} ب + جم^{2} س = ۱

تب جم^{2} ا = ۱ - جم^{2} س - جم^{2} ب = جب^{2} س

- جم^{2} ب

= - جم (س - ب) جم (س + ب)

یہہ ظاہر کرتا ہے کہ س + ب ضرور زاویہ تامہ سے بڑا ہے

اب اگر ہم فرض کرین کہ اَ = ۹۰° - س - ب ہے تو جم^{2} اَ =

جم^{2} (ب + س) اور اسلیے کم ہوگا م بہ نسبت جم (س - ب)

جم (س + ب) کے اس لیے کہ ہم فرض کرتے ہین کہ س ب سے چھوٹا

نہین ہے اور تب س - ب کم ہے ۹۰° - س - ب سے

اب جم^{2} ا بڑا ہے جم^{2} اَ سے اور ا کم ہے بہ نسبت اَ کے

اور اس لیے ا + ب + س کم ہے ۹۰° سے

س ۳۸

بموجب دفعہ ۱۰۲ کے جب ا + جب ب + جب س -

جب (ا + ب + س) = جب ا (۱ - جم ب جم س)

+ جب ب (۱ - جم س جم ا) + جب س (۱ - جم ا جم ب)

+ جب ا جب ب جب س

اور جبکہ ا اور ب اور س زاویہ حادہ ہین تو یہہ مثال ضرور مثبت ہے

مس ۳۹

فرض کرو کہ $\text{ی} = \left(\text{جم}\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}^2}$

$\therefore$ $\text{لوگ ی} = \text{ن}^2 \,\text{لوگ جم}\frac{1}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^2}{2}\,\text{لوگ}\left(1-\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}}\right)$

$= -\frac{\text{ن}^2}{2}\left\{\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{2}\text{جب}^4\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{3}\text{جب}^6\frac{1}{\text{ن}} + \cdots\right\}$

اب $\text{ن جب}\frac{1}{\text{ن}} = \frac{\text{جب}\frac{1}{\text{ن}}}{\frac{1}{\text{ن}}}$ اور یہہ برابر ہے

۱ کے جبکہ ن غیر محدود بڑہائی جاوے

اور اسلئے $\text{ن}^2\,\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}} = 1$

تو $\text{ن}^2\,\text{جب}^4\frac{1}{\text{ن}} = \text{ن}^2\,\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}} \times \text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}}$ اور یہہ صفر ہوجائیگی

جبکہ ن غیر محدود بڑہائی جاوے اسیطرح دوسری مثالون

مین لوگ ی مین صفر ہوجاتے ہین اور جیساکہ

۵۰۲ دفعہ کے بموجب انکی قیمت صفر ہے اور اسلئے لوگ

$\text{ی} = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\text{ی} = \text{ہ}^{-\frac{1}{2}}$

مس ۴۰

فرض کرو کہ $\text{و} = \left(\text{جم}\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}^3}$

$\therefore$ $\text{لوگ و} = \text{ن}^3\,\text{لوگ جم}\frac{1}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}^3}{2}\,\text{لوگ}\left(1-\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}}\right)$

$= -\frac{\text{ن}^3}{2}\left\{\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{2}\text{جب}^4\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{3}\text{جب}^6\frac{1}{\text{ن}} + \cdots\right\}$

پہلی مثال کے حل کرنے مین ہمنے ظاہر کیا ہے کہ

$\text{ن}^2\,\text{جب}^2\frac{1}{\text{ن}} = 1$

اسجگہہ $\text{ن}^{۳}\ \text{جب}\ \frac{۱}{\text{ن}} = \text{ن}^{۲}$ اور اسطرح لاانتہا ہو جائیگی
اِسطرح لوکارتم ولاانتہا منفی ہے اور اس لئے وصفر
ہوگا

س ۱۴

$$\text{جب}\ \theta - (\text{مس}\ \theta - \tfrac{۱}{۲}\text{مس}^{۳}\theta) = \text{جب}\ \theta - \text{مس}\ \theta + \tfrac{۱}{۲}\text{مس}^{۳}\theta$$

$$= \text{جب}\ \theta - \frac{\text{جب}\ \theta}{\text{جم}\ \theta} + \frac{\text{ا جب}^{۳}\theta}{۲\ \text{جم}^{۳}\theta} = \frac{\text{جب}\ \theta}{\text{جم}^{۳}\theta} \times \left\{\text{جم}^{۳}\theta - \text{جم}^{۲}\theta + \tfrac{۱}{۲}\text{جب}^{۲}\theta\right\}$$

$$= \frac{\text{جب}\ \theta}{۲\ \text{جم}^{۳}\theta}\left\{۲\ \text{جم}^{۳}\theta - ۲\ \text{جم}^{۲}\theta + ۱ - \text{جم}^{۲}\theta\right\}$$

$$= \frac{\text{جب}\ \theta\,(۱ - \text{جم}\ \theta)}{۲\ \text{جم}^{۳}\theta}\left\{۱ + \text{جم}\ \theta - ۲\ \text{جم}^{۲}\theta\right\}$$

$$= \frac{\text{جب}\ \theta\,(۱ - \text{جم}\ \theta)(۱ - \text{جم}\ \theta)(۱ + ۲\ \text{جم}\ \theta)}{۲\ \text{جم}^{۳}\theta}$$

$$= \frac{\text{جب}\ \theta\,(۱ - \text{جم}\ \theta)^{۲}(۱ + ۲\ \text{جم}\ \theta)}{۲\ \text{جم}^{۳}\theta}$$ جبکہ مثبت ہے

س ۲۴

فرض کرو کہ $\text{و} = \frac{(\text{و} - ۱)}{\text{و}}$

تب $\text{لوگ و} = \text{و لوگ}\ \frac{\text{و} - ۱}{\text{و}} = \text{و لوگ}\ (۱ - \frac{۱}{\text{و}})$

$$= -\text{و}\left\{\frac{۱}{\text{و}} + \frac{۱}{۲\text{و}^{۲}} + \frac{۱}{۳\text{و}^{۳}} + \cdots\right\}$$

= − { ۱۰ + ۱/۲و + ۱/۲و۳ + ۰۰۰۰ }

اسطرح لوکارثم ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور جسطرح کہ د بڑھتی ہے لوکارثم دسا باگھٹتی ہے اور اسیطرح و بڑھتے ہے جبکہ د لاانتہا ہو تو
لوگ و = −∞ اور اسلئے و = ستی ا

سوالات نمبر ۱۱

س ۱

۴،۰۹۴۸۵۵۳
۴،۰۹۴۸۲۰۴ ۱ : ،۳۵ :: ،۰۰۰۰۳۴۹ : د
،۰۰۰۰۳۴۹

اسطرح د = ،۰۰۰۰۱۲۲

:. لوگ ۱۲۴۴۳۰،۳۵ = ۴،۰۹۴۸۳۲۶

س ۲

۱،۰۲۸۸۵۵۸ ۱،۰۲۸۸۳۵۵
۱،۰۲۸۸۱۵۲ ۱،۰۲۸۸۱۵۲
،۰۰۰۰۴۰۶ ،۰۰۰۰۲۰۳

،۰۰۰۰۴۰۶ : ،۰۰۰۰۲۰۳ :: ،۰۰۱ : د

∴ و = ٫٠٠٠٠٥

∴ لوگ ١٫٠٦٨٦٥ = ٫٠٢٨٨٣٥٥

س ٣

٤٫٣٧٠٢٧٢٥

٤٫٣٧٠٢٥٤٠

٫٠٠٠٠١٨٥

١	١٨٥
٢	٣٧٠
٣	٥٥٥
٤	٧٤٠
٥	٩٢٥
٦	١١١٠
٧	١٢٩٥
٨	١٤٨٠
٩	١٦٦٥

لوگ ٢٣٤٥٦ = ٤٫٣٧٠٢٥٤٠

جمع کرو واسطے ٣ ٥٥٥

٨ ١٤٨٠

٤٫٣٧٠٢٦٧٠٣٠

جواب سات درجہ کسر اعشاریہ تک نکالو ۔

لوگ ٢٣٤٥٦٫٣٨ = ٤٫٣٧٠٢٦١٠

اور لوگ ٫٢٣٤٥٦٣٨ = ١̄٫٣٧٠٢٦١٠

س ٤

(١١٨٧٥٣١٤٥ = ٣̄٫١٢٤٦٨٥٥

١١٢٤٦٩٩٨ ١١٢٤٦٨٥٥

١١٢٤٦٦٧٢ ١١٢٤٦٦٧٢

٫٠٠٠٠٣٢٦ ٫٠٠٠٠١٨٣

،۰۰۰۳۲۶ : ،۰۰۰۰۱۸۳ :: ،۰۰۱ : و

∴ و = ،۰۰۰۰۵۶

∴ لوگ ۱،۳۳۲۵۵۶ = ،۱۲۴۶۸۵۵

∴ لوگ ،۰۱۳۳۲۵۵ = ۲̄،۱۲۴۶۸۵۵

س ۵

،۵۸۶۰۳۵۶ ‏ ‏ ‏ ،۰۰۰۱ : ،۰۰۰۰۴ :: ،۰۰۰۱۱۲ : و

،۵۸۶۰۲۴۴

―――――

،۰۰۰۱۱۲ ‏ ‏ ‏ ∴ و = ،۰۰۰۰۴۵

∴ لوگ ۳،۸۵۵۰۴ = ،۵۸۶۰۲۸۹

∴ لوگ ،۰۰۳۸۵۵۰۴ = ۳̄،۵۸۶۰۲۸۹

∴ لوگ (،۰۰۳۸۵۵۰۴)^(۱/۴) = ۱/۴ (۳̄،۵۸۶۰۲۸۹) =

۱/۴ (−۴ + ۱،۵۸۶۰۲۸۹) = ۱̄،۳۹۶۵۰۷۲

س ۶

لوگ (۲۴)^(۱/۴) = ۱/۴ لوگ ۲۴ = ،۷۹۰۱۰۵۶

،۷۹۰۱۰۷۴ ‏ ‏ ‏ ،۷۹۰۱۰۵۶

،۷۹۰۰۹۸۶ ‏ ‏ ‏ ،۷۹۰۰۹۸۶

―――――

،۰۰۰۰۰۸۸ ‏ ‏ ‏ ،۰۰۰۰۰۷۰

،۰۰۰۰۰۸۸ : ،۰۰۰۰۰۷۰ :: ،۰۰۱ : و

∴ و = ،۰۰۰۷۹

∴ لوگ ۴٫۸۹۸۹۷۹ = ٫۶۹۰۱۰۵۶

∴ $(۲۴)^{\frac{1}{۲}}$ = ۴٫۸۹۸۹۷۹

مش

لوگ $(۱۴۲٫۷۱)^{\frac{1}{۷}}$ = $\frac{1}{۷}$ (۲٫۱۵۴۴۵۴۴) = ٫۳۰۷۷۷۹۲

٫۳۰۷۷۹۵۴ ، ٫۳۰۷۷۷۹۲ ، ٫۰۰۰۰۲۱۳ : ٫۰۰۰۰۰۵۱ :: ۱ : و

$\frac{٫۳۰۷۷۷۴۱}{٫۰۰۰۰۲۱۳}$ $\frac{٫۳۰۷۷۷۴۱}{٫۰۰۰۰۰۵۱}$ ∴ و = ٫۲۴

∴ لوگ ۲٫۰۳۱۳۲۴ = ٫۳۰۷۷۷۹۲

∴ لوگ ۲٫۰۳۱۳۲۴ = ٫۳۰۷۷۹۹۲

∴ لوگ $(۱۴۲٫۷۱)^{\frac{1}{۷}}$ = ۲٫۰۳۱۳۲۴

مش

لوگ $(۰٫۰۷)^{\frac{1}{۵}}$ = $\frac{1}{۵}$ لوگ ۰٫۰۷ = $\frac{1}{۵}$ (۲̄٫۸۴۵۰۹۸۰) =

$\frac{1}{۵}$ (−۵ + ۳٫۸۴۵۰۹۸۰) = ۱̄٫۷۶۹۰۱۹۶

٫۷۶۹۰۲۲۷ ، ٫۷۶۹۰۱۹۶

٫۷۶۹۰۱۵۳ ، ٫۷۶۹۰۱۵۳

٫۰۰۰۰۰۷۴ ، ٫۰۰۰۰۰۴۳

٫۰۰۰۰۰۷۴ : ٫۰۰۰۰۰۴۳ :: ۱ : و

∴ و = ٫۵۸

∴ لوگ ۵۸۷۵۱٫۵۸ = ۴٫۷۶۹۰۱۹۶

∴ لوگ ٫۵۸۷۵۱۵۸ = ۱̄٫۷۶۹۰۱۹۶

= −،۱۲۸۳۷۲ = ۱̄،۸۷۱۶۲۸ = لوگ ،۷۴۴۰۹۴۲

∴ (۱،۰۳)^{−۱۰} = ،۷۴۴۰۹۴۲

س ۱۴۳ ب

لوگ (۱،۰۵)^{−۲۰} = −۲۰ × ،۰۲۱۱۸۹۳ =

= −،۴۲۳۷۸۶ = ۱̄،۵۷۶۲۱۴ = لوگ ،۳۷۶۸۹

∴ (۱،۰۵)^{−۲۰} = ،۳۷۶۸۹

∴ ۶۴{۱ − (۱،۰۵)^{−۲۰}} = ۶۴(۱ − ،۳۷۶۸۹)

= ۶۴ × ،۶۲۳۱۱ = ۳۹،۸۷۹۰۴

س ۱۴۴

اس کو یؔ فرض کرو تو لوگ ی = √۵ لوگ ۲ = ۲√۵ لوگ √۵

∴ لوگ × لوگ ی = لوگ ۲ + لوگ ۲ + لوگ (لوگ √۵)

اب لوگ (√۵) = ½ لوگ ۵ = ½ لوگ ۱۰/۲ = ½ (۱ − لوگ ۲)

= ½ (۱ − ،۳۰۱۰۳۰) = ½ (،۶۹۸۹۷۰) = ،۳۴۹۴۸۵

لوگ (لوگ √۵) = ،۳۴۹۴۸۵ = ۱̄،۵۴۳۴۲۸

∴ لوگ (لوگ ی) = ،۳۰۱۰۳۰ + ،۳۴۹۴۸۵ +

۱̄،۵۴۳۴۲۸ = ،۱۹۳۹۴۳

∴ لوگ ی = ۱،۵۶۲۹۴۴

،۵۶۳۰۰۶   ،۵۶۲۹۴۴

،۵۶۲۸۸۷   ،۵۶۲۸۸۷

،۰۰۰۱۱۹   ،۰۰۰۰۵۷

۰۰۱۱۹ء : ۷۵۰۰۰ء :: ۰۰۱ء : و

∴ و = ۰۴۰۰۰ء۰ ∴ ی = ۸۴۵۵ء۳۶

س ۱۵

لوگ ۱۴۴ = لوگ $(۱۲)^{۲}$ = ۲ لوگ ۱۲ = ۲۲۶۴۳۸۵۱ء۲

لوگ $(۱ء۴۴)^{-۶}$ = -۶ لوگ ۱ء۴۴ = -۶ (۱۵۸۳۶۲۴ء)

= -۹۵۰۱۷۴۴ء = ۲۵۸۹۴ء۱۶۰ = لوگ ۱۱۲۱۵۶۸ء

∴ $(۱ء۴۴)^{-۶}$ = ۱۱۲۱۵۶۸ء

∴ لوگ $(۱ء۴۴)^{-۱۲}$ = -۱۲ لوگ (۱ء۴۴) = -۱۲ (۱۵۸۳۶۲۴ء) = -۱ء۹۰۰۳۴۸۸

= ۲ء۰۹۹۶۵۱۲ = لوگ ۰۱۲۵۷۹۱۵ء ∴ $(۱ء۴۴)^{-۱۲}$ = ۰۱۲۵۷۹۱۵ء

∴ $(۱ء۴۴)^{-۶}$ − $(۱ء۴۴)^{-۱۲}$ = ۱۱۲۱۵۶۸ء − ۰۱۲۵۷۹۱۵ء

= ۰۹۹۵۷۷۶۵ء

س ۱۶

لوگ $\frac{۱}{(۱ء۰۵)^{۱۳}}$ = -۱۳ لوگ ۱ء۰۵ = -۱۳ (۰۲۱۱۸۹۳ء)

= -۲۷۵۴۶۰۹ء = ۱ء۷۲۴۵۳۹۱ = لوگ ۵۳۰۳۲۱۴ء

∴ لوگ $\frac{۱}{(۱ء۰۵)^{۱۳}}$ = ۵۳۰۳۲۱۴ء

لوگ $\frac{۱}{(۱ء۰۵)^{۲۰}}$ = -۲۰ لوگ ۱ء۰۵ = -۲۰ (۰۲۱۱۸۹۳ء)

= -۴۲۳۷۸۶ء

= ۱،۵۷۶۲۱۴ = لوگ ۱،۳۷۶۸۸۸۹۴

∴ $\frac{۱}{۳(۱،۰۵)}$ = ۱،۳۷۶۸۸۹۴ ∴

∴ $\frac{۱}{۰۵}$ {$\frac{۱}{(۱،۰۵)^{۱۳}}$ − $\frac{۱}{(۱،۰۵)^{۱۰}}$} ۲۰ = {۱۴۲۳۰۳۵،

− ۱،۳۷۶۸۸۹۴)}

= ۲۰ {۲۳۴۳۵۱۱،} = ۳۶۰۶۸۶۴

ش ۱۷

۱،۷۴۳۱۴۴۸

۰۶:۱::۱۱۹۷۱۱۰،۱ : و

۱،۷ ۳۱۳۵۳۷

۱،۰۱۱۷۹۱۱

اسواسطے و = ۱،۰۰۰۱۹۶۵

∴ جب ۷ٖ ۴۵ اَ = ۳۷ ۵ ۳۱۳ ۷ ،۱ + ۱،۰۰۰۱۹۶۵ =

۱،۷۲۱۵۵۰۲

ش ۱۸

۱،۱۲۷۰۶۴۶

۰۶ٖ: ۲۵ٖ :: ۱،۰۰۰۲۸۸۵ : و

۱،۱۲۶۷۷۶۱

۱،۰۰۰۲۸۸۵

اسواسطے و = ۱،۰۰۰۱۲۰۲

∴ جب ۵ٖ − ۱۷ٖ − ۲۵ٖ = ۱،۱۲۶۷۷۶۱ + ۱،۰۰۰۱۲۰۲

= ۱،۱۲۶۸۹۶۳

س ۱۹

۹،۴۶۶۳۴۸۳

۹،۴۶۵۹۳۵۳   ۶۰″ : ۱۲″ :: ،۰۰۰۴۱۳۰ : د

،۰۰۰۴۱۳۰

اسواسطے د = ،۰۰۰۰۸۲۶ ∴ ل جب ۱۷° ۰′ ۱۲″

= ۹،۴۶۵۹۳۵۳ + ،۰۰۰۰۸۲۶

= ۹،۴۶۶۰۱۷۹

س ۲۰

۹،۶۴۸۲۵۸۲

۹،۶۴۸۰۰۳۸   ۶۰″ : ۱۲″ :: ،۰۰۰۲۵۴۴ : د

،۰۰۰۲۵۴۴

اسواسطے د = ،۰۰۰۰۵۰۹

∴ ل جب ۲۶° ۲۴′ ۱۲″ = ۹،۶۴۸۰۰۳۸ +

،۰۰۰۰۵۰۹

= ۹،۶۴۸۰۵۴۷

س ۲۱

۹،۵۰۵۲۸۹۱

۹،۵۰۴۸۵۳۹   ۶۰″ : ۳۵″ :: ،۰۰۰۴۳۵۲ : د

،۰۰۰۴۳۵۲

اسواسطے د = ،۰۰۰۲۵۳۹

س ۲۵

چونکہ قع ہ × جم ہ = ا، اور لوگ قع ہ + لوگ جم ہ = ۰

∴ ل قع ہ + ل جم ہ − ۲۰ = ۰ ∴ ل قع ہ = ۲۰

− ل جم ہ

پہلے ہم دریافت کرینگے ل جم ۵۳° ۱۹′ ۴۰″

۰۶″ : ۴۰″ :: ٫۰۰۰۰۹۶۳ : د ∴ د =

٫۰۰۰۰۵۴ ∴ ل جم ۵۳° ۱۹′ ۴۰″ =

۹٫۹۰۰۵۲۹۴ − ٫۰۰۰۰۵۴ =

۹٫۹۰۰۴۵۴۰ تب ل قع ۵۳° ۱۹′ ۴۰″ =

۲۰ − ۹٫۹۰۰۴۵۴۰ = ۱۰٫۰۹۹۵۴۶۰

پھر دریافت کرینگے ل جب ۵۳° ۱۹′ ۴۰″ ∴ ۰۶″ : ۴۰″ :: ٫۰۰۰۱۹۴۷ : د ∴ د = ٫۰۰۰۱۲۹۸ ∴

۹٫۷۸۲۶۳۰۱ + ٫۰۰۰۱۲۹۸ =

۹٫۷۸۲۷۵۹۹ تو مس ہ = جب ہ / جم ہ ∴ لوگ مس ہ

= لوگ جب ہ − لوگ جم ہ ∴ ل مس ہ − ۱۰

= ل جب ہ − ۱۰ − (ل جم ہ − ۱۰) =

ل جب ہ − ل جم ہ ∴ ل مس ہ = ۱۰ + ل جب ہ

− ل جم ہ ∴ ل مس ۵۳° ۱۹′ ۴۰″ = ۱۰ +

۹٫۷۸۲۷۵۹۹ − ۹٫۹۰۰۴۵۴۰ =

جم = [(و² − ۱)² + (۲و + ۱)² − (و² + و + ۱)²] ÷ ۲ (و² − ۱) (۲و + ۱)

= [و⁴ − ۲و² + ۱ + ۴و² + ۴و + ۱ − (و⁴ + ۲و³ + ۳و² + ۲و + ۱)] ÷ ۲ (و² − ۱) (۲و + ۱)

= (−۲و³ − و² + ۲و + ۱) ÷ ۲ (۲و³ + و² − ۲و − ۱) = −۱/۲

اسواسطے زاویہ ۱۲۰ درجہ کا ہے

س۲ — ۲ جب س جم ب = جب ا = جب (ب + س)

= جب ب جم س + جم ب جب س

∴ جب س جم ب = جب ب جم س ∴ جب (س − ب)

= ۰ ∴ ب = س

س۳ — جم ا = ب/س اور جب ا = ا/س

∴ (۱ + جم ا) ÷ جب ا = (س + ب) ÷ ا ∴ مم ا/۲ = (ب + س) ÷ ا

س۴ — ا مس ا + ب مس ب = (ا + ب) مس (ا + ب)/۲

∴ ا (مس ا − مس (ا + ب)/۲) = ب (مس (ا + ب)/۲ −

مس ب)

∴ ا (جب ا جم (ا+ب)/۲ − جم ا جب (ا+ب)/۲) / (جم ا جم (ا+ب)/۲)

= ب (جب (ا+ب)/۲ جم ب − جم (ا+ب)/۲ جب ب) / (جم ب جم (ا+ب)/۲)

∴ (ا جب (ا−ب)/۲) / جم ا = (ب جب (ا−ب)/۲) / جم ب

∴ ا/ب = جم ا / جم ب

لیکن ا/ب = جب ا / جب ب ∴ جب ا / جب ب = جم ا / جم ب ∴

مس ا = مس ب

∴ ا = ب

س ۵

فرض کرو کہ ۲ ا چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کو ظاہر کرتا ہے تب دوسرے زاوے جداگانہ ۴ ا اور ۸ ا ہین

∴ ۲ ا + ۴ ا + ۸ ا = π ∴ ا = π/۱۴

اسلئے ۸، ۷ دفعہ کے بموجب اندازہ سب سے بڑے ضلع کا محیط تک

= جب ۸ ا / (جب ۲ ا + جب ۴ ا + جب ۸ ا) = جب ۸ ا / (جب ۲ ا + جب ۴ ا + جب ۶ ا)

$$= \frac{\text{۲ جب ۴ ا جم ۴ ا}}{\text{۲ جب ۳ ا جم ا + ۲ جب ۳ ا جم ۳ ا}}$$

لیکن ۴ ا + ۳ ا = $\frac{\pi}{۲}$ ∴ جم ۴ ا = جب ۳ ا اور اسیطرح یہہ سفال مساوی ہے

$$\frac{\text{جب ۴ ا}}{\text{جم ا + جم ۳ ا}} = \frac{\text{۲ جب ۲ ا جم ۲ ا}}{\text{۲ جم ا جم ۲ ا}} = \frac{\text{جب ۲ ا}}{\text{جم ا}}$$

= ۲ جب ا

س ۶

۲ ب س حق ا + ۲ س ا حق ب + ۲ ا ب حق س

= ۲ ب س (۱ - جم ا) + ۲ س ا (۱ - جم ب)

+ ۲ ا ب (۱ - جم س)

= ۲ ب س (۱ + جم ا) + ۲ س ا (۱ + جم ب)

+ ۲ ا ب (۱ + جم س)

$= \text{۴ ب س جم}^{۲} \frac{\text{ا}}{۲} + \text{۴ س ا جم}^{۲} \frac{\text{ب}}{۲} + \text{۴ ا ب جم}^{۲} \frac{\text{س}}{۲}$

= ۴ ص (ص - ا) + ۴ ص (ص - ب) + ۴ ص (ص - س)

$= \text{۴ ص (۳ ص - ا - ب - س)} = \text{۴ ص}^{۲} = (\text{۲ ص})^{۲} =$

ش

(ا + ب + س)۲

فرض کرو کہ اد = پ اور فرض کرو کہ زاویہ ب اور زاویہ س

زاوی حادہ ہین

جیسا کہ دفعہ ۱۰۶ کے بائین طرف کی شکل مین

تب ای = پ جم (۹۰ – ب) = پ جب ب

اور دی = پ جب (۹۰ – ب) = پ جم ب

اور ی ب = دی مم ب = پ جم ب مم ب

∴ ای . ی ب = پ۲ جم۲ ب

اِسیطرح اف . ف س = پ۲ جم۲ س ∴

∴ ای . ی ب جم۲ س = اف . ف س جم۲ ب

پھر فرض کرو کہ زاویون ب اور س مین سے ایک منفرجہ ہے

تو زاویہ س ہے تبلا جیسا کہ دفعہ ۱۰۶ کے داہین طرف کی

شکل مین

تب ای . ی ب = پ۲ جم۲ ب   جیسا کہ پیشتر ثابت ہو چکا ہے

اف = پ جم (س – ۹۰) = پ جب س

دف = پ جب (س – ۹۰) = – پ جم س

ف س = دف مم (۱۸۰ – س) = – دف مم س

= ب جم س مم س

∴ او ف . ف س = ب جم^۲ س جیسا کہ پیشتر ثابت ہو چکا ہے

س ۸

$\frac{\text{جب ۲ ہ + جب ۴ ہ}}{\text{جب ۳ ہ}} = \frac{\text{ا + س}}{\text{ب}}$ ∴ ۲ جم ہ =

$\frac{\text{ا + س}}{\text{۲ ب}}$ = ∴ جم ہ $\frac{\text{ا + س}}{\text{ب}}$

∴ مس^۲ ہ = $\frac{۱}{\text{جم ہ}}$ − ۱ = $\left(\frac{\text{۲ ب}}{\text{ا + س}}\right)^۲$ − ۱

س ۹

جب س زاویہ منفرجہ ہو تو (ا + ب) ۹۰ درجہ سے کم ہے اسلئے جم (ا + ب) مثبت ہے

∴ ا جم ب جب ا جب ب مثبت ہے ∴ جب ا جب ب کم ہے جم ا جم ب

∴ $\frac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}$ ایک اکائی سے کم ہے یعنے مس ا مس ب اکائی سے کم ہے

س ۱۰

چونکہ ا اور ب اور س سلسلہ جمع تفریق مین ہین اسلئے جب ا اور جب ب اور جب س بھی ایسے ہین

اسلئے جب ا + جب س = ۲ جب ب

∴ جب $\frac{\text{ا + س}}{۲}$ جم $\frac{\text{ا − س}}{۲}$ = ۲ جب $\frac{\text{ب}}{۲}$ جم $\frac{\text{ب}}{۲}$

$= ۲ \text{ جب } \frac{ب}{۲} \text{ جب } \frac{ا+س}{۲}$

$\therefore \text{ جم } \frac{ا-س}{۲} = ۲ \text{ جب } \frac{ب}{۲}$

پھر $ا \text{ جم}^۲ \frac{س}{۲} + س \text{ جم}^۲ \frac{ا}{۲} = \frac{ا}{۲}(۱ + \text{جم } س) + \frac{س}{۲}(۱ + \text{جم } ا)$

$= \frac{۱}{۲}(ا + س) + \frac{۱}{۲}(ا \text{ جم } س + س \text{ جم } ا) =$

$\frac{۱}{۲}(ا + س) + \frac{ب}{۲}$ بموجب دفعہ ۱۷۰

$= ب + \frac{ب}{۲}$ اور اندازہ $= \frac{۳ب}{۲}$

س ۱۱ اب د مثلث سے ہم رکھتے ہیں $\frac{\text{جب } ا د ب}{\text{جب } ب ا د} = \frac{ا ب}{ب د} = \frac{۲ س}{ا}$

پ کو بجائے ب ا د کے فرض کرو اسی طرح پر

$\frac{\text{جب }(ب + پ)}{\text{جب } پ} = \frac{۲ س}{ا} = \frac{۲ \text{ جب } س}{\text{جب } ا}$

$\therefore \frac{\text{جب } ب \text{ جم } پ + \text{جم } ب \text{ جب } پ}{\text{جب } پ} = \frac{۲ \text{ جب } س}{\text{جب } ا}$

$\therefore \text{مم } پ + \text{مم } ب = \frac{۲ \text{ جب } س}{\text{جب } ا \text{ جب } ب} = \frac{۲ \text{ جب }(ا + ب)}{\text{جب } ا \text{ جب } ب}$

$= ۲ \text{ مم } ا + ۲ \text{ مم } ب \therefore \text{مم } پ - \text{مم } ب = ۲ \text{ مم } ا$

س ۱۲ فرض کرو کہ مثلث کا زاویہ ا ایک خط مستقیم ا د سے

دو حصوں میں تقسیم ہوتا ہے

ب ا کو پ سے اور س ا کو م سے فرض کرو

اور فرض کرو کہ $\frac{\text{جب پ}}{\text{جب م}} = \frac{\text{س}}{\text{ب}}$

اِستطرع $\frac{\text{جب (ا - م)}}{\text{جب م}} = \frac{\text{س}}{\text{ب}} = \frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$

∴ جب ا مم م - جم ا = $\frac{\text{جب س}}{\text{جب ب}}$ ∴ مم م = مم ا

+ $\frac{\text{جب (ا + ب)}}{\text{جب ا جب ب}}$ = ۲ مم ا + مم ب

اِسیطرع مم پ = ۲ مم ا + مم س

∴ مم م - مم پ = مم ب - مم س

س ۱۳ فرض کرو کہ مم ا + مم س = ۲ مم ب

اِسیطرع $\frac{\text{جم ا}}{\text{جب ا}} + \frac{\text{جم س}}{\text{جب س}} = \frac{\text{۲ جم ب}}{\text{جب ب}}$

∴ $\frac{\text{جب (ا + س)}}{\text{جب ا جب س}} = \frac{\text{۲ جم ب}}{\text{جب ب}}$

∴ $\frac{\text{جب}^2\text{ ب}}{\text{جب ا جب س}} = \text{۲ جم ب} ∴ \frac{\text{ب}^2}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا}^2 + \text{س}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا س}}$

∴ ۲ ب^2 = ا^2 + س^2

س ۱۴

اسطرح ا² اور ب² اور س² سلسلہ جمع و تفریق مین ہین

فرض کرو کہ عمود ا د ایک مثلث کا دیا ہوا قاعدہ ب س پر کھینچا گیا ہے

فرض کرو ب ا د = پ اور س ا د = ت

فرض کرو کہ م قاعدہ ب س اور عمود ا د کی باہمی نسبت کو ظاہر کرتا ہے +

تب دفعہ ۱۶۸ کی بائین طرف کی شکل کی حالت مین

ہم رکھتے ہین

مس پ = ب د / ا د اور مس ت = س د / ا د

∴ مس پ + مس ت = (ب د + س د) / ا د = ب س / ا د = م ... (۱)

اور نیز پ + ت = ا

اسطرح مس ا = مس (پ + ت) = (مس پ + مس ت) / (۱ − مس پ مس ت) ... (۲)

اول (۱) ... دوم سے ہم معلوم کر سکتے ہین مس پ اور مس ت

اسیطرح دفعہ ۱۶۸ کے دائین طرف کی شکل

کی حالتمین ہم رکھتے ہین مس پ − مس ت = م اور مس ا

= مس (پ − ت) = (مس پ − مس ت) / (۱ + مس پ مس ت)

س ۱۵

فرض کرو کہ ایک مثلث کا قاعدہ ب س تین تقسیم کیا گیا ہے

د اور ہی کے نقاط پر اسطرح کہ

ب د = د ی ÷ ی س

فرض کرو کہ زاویہ ب ا د ظاہر کیا گیا ہے پ سے

اور زاویہ د ا ی پ۲ سے اور زاویہ ی ا س پ۳ سے

تب ا ب ی مثلث سے ہم رکھتے ہین

$$\frac{\text{جب}(\text{پ}_1+\text{پ}_2)}{\text{جب ا ی پ}} = \frac{\text{ب ی}}{\text{ا ب}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\text{س}}$$

اور مثلث ا ی س سے ہم رکھتے ہین $\frac{\text{جب پ}_3}{\text{جب ا ی س}}$

$$= \frac{\text{ی س}}{\text{ا س}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\text{پ}}$$

$$\therefore \text{تقسیم سے}\ \frac{\text{جب}(\text{پ}_2+\text{پ}_3)}{\text{جب پ}_3} = \frac{2\,\text{پ}}{\text{س}}$$

اِس طریقہ مین ہم دیکھتے ہین

$$\frac{\text{جب}(\text{پ}_1+\text{پ}_2)}{\text{جب پ}_1} = \frac{2\,\text{س}}{\text{ب}}$$

$$\therefore \frac{\text{جب}(\text{پ}_1+\text{پ}_2)\ \text{جب}(\text{پ}_2+\text{پ}_3)}{\text{جب پ}_1\ \text{جب پ}_3} =$$

$$4 = 4\,(\text{جب}^2\,\text{پ}_1 + \text{جم}^2\,\text{پ}_2)$$

$$(\text{جم پ}_2 + \text{جب پ}_2\ \text{تم پ}_1)(\text{تم پ}_2 + \text{جب پ}_2\ \text{تم پ}_3)$$

= ۴ (جب² $\frac{پ}{۲}$ + جم² $\frac{پ}{۲}$)

∴ (مم $\frac{پ}{۲}$ + مم $\frac{پ}{۲}$) (مم $\frac{پ}{۲}$ + مم $\frac{پ}{۲}$) = ۴ (۱ + مم² $\frac{پ}{۲}$)

س ۱۶ فرض کرو کہ جب ا + جب س = ۲ جب ب

تو ۲ جب $\frac{ا + س}{۲}$ جم $\frac{ا - س}{۲}$ = ۴ جب $\frac{ب}{۲}$ جم $\frac{ب}{۲}$

= ۴ جم $\frac{ا + س}{۲}$ جب $\frac{ا + س}{۲}$ ∴ جم $\frac{ا - س}{۲}$ = ۲ جم $\frac{ا + س}{۲}$

∴ جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{س}{۲}$ + جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$ = ۲ جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{س}{۲}$ − ۲ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$

∴ ۳ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$ = جم $\frac{ا}{۲}$ جم $\frac{س}{۲}$

∴ مس $\frac{ا}{۲}$ مس $\frac{س}{۲}$ = $\frac{۱}{۳}$

س ۱۷ فرض کرو کہ مثلث ا د ب = پ اور مثلث ا ب د س سے ہم رکھتے ہین +

$\frac{\text{جب ب ا د}}{\text{جب ا د ب}}$ = $\frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}}$ = $\frac{۱}{\text{۲ مس}}$

∴ $\frac{\text{جب (پ + ب)}}{\text{جب پ}}$ = $\frac{۱}{\text{۲ مس}}$

∴ جم ب + جب ب مم پ = ۱ / ۲س

∴ مم پ = (۱/۲س − جم ب) / جب ب

∴ مس پ = ۲س جب ب / (۱ − ۲س جم ب) =

= ۲اس جب ب / (ا۲ − (ا۲ + س۲ − ب۲))

= ۲اس جب ب / (ب۲ − س۲) = ۲ب س جب ا / (ب۲ − س۲)

ش ۱۸

یعنی مم ا/۲ + مم س/۲ = ۲ مم ب/۲

∴ جم ا/۲ / جب ا/۲ + جم س/۲ / جب س/۲ = ۲ جم ب/۲ / جب ب/۲

= ۲ جب (ا + س)/۲ / جم (ا + س)/۲

∴ جب (ا + س)/۲ / (جب ا/۲ جب س/۲) = ۲ جب (ا + س)/۲ / (جم (ا + س)/۲)

∴ جم (ا + س)/۲ = ۲ جب ا/۲ جب س/۲ ∴ جم ا/۲ جم س/۲

− جب ا/۲ جب س/۲

$$= ۲\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جب}\ \frac{\text{س}}{۲}$$

$$\therefore\ \text{جم}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جم}\ \frac{\text{س}}{۲} = ۲\ \text{جب}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{جب}\ \frac{\text{س}}{۲}$$

$$\therefore\ \text{مم}\ \frac{\text{ا}}{۲}\ \text{مم}\ \frac{\text{س}}{۲} = ۲$$

سل ۱۹

اول فرض کرو کہ $\frac{\text{جب و ا س}}{\text{جب و ا ب}} = \frac{۱}{\text{ن}}$

اور $\frac{\text{جب و ب س}}{\text{جب و ب ا}} = \frac{۱}{\text{ن}}$

چونکہ ہم رکھتے ہین $\frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و ب س}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و س}}$

اور $\frac{\text{جب و ب س}}{\text{جب و ب ا}} = \frac{۱}{\text{ن}}$

$$\therefore\ \frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و ب ا}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و س}} \cdot \frac{۱}{\text{ن}}$$

اسیطرح $\frac{\text{جب و س ا}}{\text{جب و ا ب}} = \frac{\text{ا و}}{\text{و س}} \cdot \frac{۱}{\text{ن}}$

$$\therefore\ \frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و س ا}} \cdot \frac{\text{جب و ا ب}}{\text{جب و ب ا}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و ا}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و س ا}} \cdot \frac{\text{و ب}}{\text{و ا}} = \frac{\text{ب و}}{\text{و ا}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{جب و س ب}}{\text{جب و س ا}} = 1$$

اضلاع سے نقاط د دی و ف سے ملتی ہوے اسطرح کہنچو

کہ زاویہ ب ا د = زاویہ س ب ی = ا س ف = اَ

اور فرض کرو کہ خطوط مستقیمہ سے ل م ن ایک مثلث ایسا بنگیا ہے کہ

نقطے ا د ل وم د دایک خط مستقیم پر ہین اور ب وم دن

دی د دوسرے خط پر اور س د ن د ل وف تیسرے

خط پر تب ل م ن مثلث ا ب س مثلث کے متشابہ

ہوگا کیونکہ

زاویہ م ل ن = زاویہ م ا س + زاویہ ل س ا =

ا - اَ + اَ = ا اسیطرح سے زاویہ ن م ل = ب اور

زاویہ ل ن م = س

اسیطرح سے مثلث ل م ن متساوی الزوایا ہوی اصلی مثلث

کے اور اسیواسطے اوسکی متشابہ ہے

پہر $\frac{\text{ب ن}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب ب س ن}}{\text{جب ب ن س}} = \frac{\text{جب (س - اَ)}}{\text{جب (۱۸۰ - س)}}$

$= \frac{\text{جب (س - اَ)}}{\text{جب س}}$ ∴ $\text{ب ن} = \frac{\text{ا جب (س - ا)}}{\text{جب س}}$

= اَ جب ب جب س = اَ/جب ا جب ا جب ب جب س

اسیطرح بَ (جم ا جم س + جم ب) = بَ/جب ب جب ا جب ب جب س

اور سَ (جم ا جم ب + جم س) = سَ/جب س جب ا ×
جب ب جب س

اسیطرح سے یہہ تینون مثالین ۱۶۸ دفعہ کے بموجب برابر ہین ٭

س ۲۵

(بَ + سَ - اَ) مس ا/۲ = ۲ (ص - اَ) مس ا/۲

= ۲ (ص - اَ) × ما | (ص - بَ) (ص - سَ) / ص (ص - اَ) =

۲ . (ص - اَ) (ص - بَ) (ص - سَ) / ما ص

اسیطرح سے عمل کرنیسے دوسری دو مثالین بتائین ہوئین بہی جملہ بالا کے برابر ہوسکتی ہین ٭

س ۲۶

بَ جم ب + سَ جم س = اَ جب ب / جب ا جب ب +

+ اَ جب س / جب ا جم س

= اَ / ۲ جب ا (جب ۲ ب + جب ۲ س) =

$$\frac{۲\,\text{اَ جب (ب + س) جم (ب - س)}}{۲\,\text{جب (ب + س)}}$$

= اَ جم (ب — س)

ش ۲۷

۷۰ دفعہ کے بموجب سَ جم ب + بَ جم س = اَ اور اَ
جم س + سَ جم ا = بَ
اور بَ جم اَ + اَ جم ب = سَ
اُسکے جمع کرنے سے سَ (جم ب + جم ا) + بَ
(جم ا + جم س) + اَ (جم س + جم ب) = اَ + بَ + سَ

ش ۲۸

کَ کو بجائے $\frac{\text{اَ}}{\text{جب ا}}$ اور $\frac{\text{بَ}}{\text{جب ب}}$ اور $\frac{\text{سَ}}{\text{جب س}}$ جنکو ہم جانتے ہین
کہ باہم برابر ہین فرض کرو
(اَ٢ — بَ٢) مم س + (بَ٢ — سَ٢) مم اَ + (سَ٢ - اَ٢)
مم ب = کَ٢ { (جب٢ ا - جب٢ ب) مم س + (جب٢ ب -
جب٢ س) مم ا + (جب٢ س - جب٢ ا) مم ب }
= کَ٢ { جب (ا + ب) جب (ا — ب) مم س +
جب (ب + س) جب (ب — س) مم ا
+ جب (س + ا) جب (س - ا) مم ب }

= ک۲ {جب (ا − ب) جم س + جب (ب − س) جم ا
+ جب (س − ا) جم ب}

= − ک۲ {جب (ا − ب) جم (ا + ب) + جب (ب − س)
جم (ب + س) + جب (س − ا) جم (س + ا)}

= − ک۲/۲ {جب ۲ا − جب ۲ب + جب ۲ب − جب ۲س
+ جب ۲س − جب ۲ا} = ۰

س ۲۹

فرض کرو کہ ک سے وہی مراد ہے جو اوپر کے مثال مین تھے،

(اَ − بَ) مم س/۲ + (سَ − اَ) مم ب/۲ + (بَ − سَ)
مم ا/۲

= ک {(جب ا − جب ب) مم س/۲ + (جب س − جب ا) مم ب/۲
+ (جب ب − جب س) مم ا/۲}

= ۲ک {جب (ا−ب)/۲ جب (ا+ب)/۲ + جب (س−ا)/۲ جب (س+ا)/۲
+ جب (ب−س)/۲ جب (ب+س)/۲}

= ۲ک {جب² ا/۲ − جب² ب/۲ + جب² س/۲ − جب² ا/۲ +
جب² ب/۲ − جب² س/۲} = ۰

س ۳۰

ا − مس ا/۲ مس ب/۲ =

۱ − √((ص − ب) (ص − س) / ص (ص − ا)) × √((ص − ا) (ص − س) / ص (ص − ب))

= ۱ − (ص − س) / ص = ۱ − (ا + ب − س) / (ا + ب + س) = ۲ س / (ا + ب + س)

س ۱۳

(ا + ب + س) (جم ا + جم ب + جم س) =

= ا جم ا + ب جم ب + س جم س + ا جم ب + ب جم ا + ا جم س

+ س جم ا + ب جم س + س جم ب

= ا جم ا + ب جم ب + س جم س + س + ب + ا

۷۰ دفعہ کے بموجب

= ا (۱ + جم ا) + ب (۱ + جم ب) + س (۱ + جم س)

= ۲ ا جم² ا/۲ + ۲ ب جم² ب/۲ + ۲ س جم² س/۲

س ۱۴

ک کی قیمت وہی ہے جو کہ ۸۲ مثال کے حل میں ہے تو

جم ا جم ب / ا ب + جم ا جم س / ا س + جم ب جم س / ب س =

۱/ک² { جم ا جم ب / جب ا جب ب + جم ا جم س / جب ا جب س + جم ب جم س / جب ب جب س }

= ۱/ک² { مم ا مم ب + مم ا مم س + مم ب مم س }

= ع ۱/۲ = (مس ا + مس ب + مس س) / (مس ا مس ب مس س) = ع ۱/۲

۶۸ دفعہ کے بموجب

= جب۲ ا / ۲ ا

س ۳۳

اَ جم ا + بَ جم ب + سَ جم س = اَ جم ا +

(اَ جب ب / جب ا) . جم ب + (اَ جب س / جب ا) جم س

= اَ جم ا + اَ (جب ۲ ب + جب ۲ س) / ۲ جب ا = اَ جم ا +

۲ اَ جب (ب + س) جم (ب − س) / ۲ جب ا

= اَ جم ا + اَ جم (ب − س) = − اَ جم (ب + س)

+ اَ جم (ب − س)

= ۲ اَ جب ب جب س

س ۳۴

۲ اَ جب ب جب س / (اَ + بَ + سَ) = ۲ جب ب جب س / (۱ + بَ/اَ + سَ/اَ) =

۲ جب ب جب س / (۱ + جب ب / جب ا + جب س / جب ا)

= ۲ جب ا جب ب جب س / (جب ا + جب ب + جب س) = ۲ جب ا جب ب جب س / (۴ جم ا/۲ جم ب/۲ جم س/۲)

بموجب مثال ۸ و ۱۶

= ۴ جب ا/۲ جب ب/۲ جب س/۲ = جم ا + جم ب + جم س − ۱

بموجب دفعہ ۹۰

∴ جم ا + جم ب + جم س = ۱ + ۲ اَ بَ جب س / (اَ + بَ + سَ)

س ۳۵

اَ² − ۲ اَ بَ جم (۹۰ + س) = اَ² − ۲ اَ بَ (جم ۹۰ جم س − جب ۹۰ جب س)

= اَ² − اَ بَ جم س + ۲ اَ بَ جب ۹۰ جب س = اَ² − (اَ² + بَ² − سَ²)/۲ + ۲ سَ بَ جب ۹۰ جب ا

= سَ² − (سَ² + بَ² − اَ²)/۲ + ۲ بَ سَ جب ۹۰ جب ا

= سَ² − بَ سَ جم ا + ۲ بَ سَ جب ۹۰ جب ا

= سَ² − ۲ بَ سَ جم (۹۰ + ا)

س ۳۶

(بَ + سَ − اَ) / ۲ اَ = (جب ب + جب س − جب ا) / ۲ جب ا =

[۲ جب (ب + س)/۲ جم (ب − س)/۲ − ۲ جب ا/۲ جم ا/۲] / ۴ جب ا/۲ جم ا/۲

$$= \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{س}}{۲} - \text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{س}}{۲} - \text{جم}\,\frac{\text{ب}+\text{س}}{۲}}{۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

پہر $\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۴} - \text{مق}\,\frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۴}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۴}} - \frac{۱}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}} =$

$$= \frac{۲\,\text{جم}^۲\,\frac{\text{ا}}{۴} - ۱}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$= \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$ اور $\text{مم}\,\frac{\text{ب}}{۲} + \text{مم}\,\frac{\text{س}}{۲} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}}$

$$+ \frac{\text{جم}\,\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ب}+\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}} = \frac{\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{مم}\,\frac{\text{ا}}{۴} - \text{مق}\,\frac{\text{ا}}{۲}}{\text{مم}\,\frac{\text{ب}}{۲} + \text{مم}\,\frac{\text{س}}{۲}} = \frac{\text{جب}\,\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب}\,\frac{\text{ا}}{۲}}$$

$$= \frac{\text{ب} + \text{س} - \text{ا}}{۲\,\text{ا}}$$

س ۳۷

$۴\,\text{ع}\,(\text{ع} - \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲})\,(\text{ع} - \text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲})\,(\text{ع} - \text{جم}\,\frac{\text{س}}{۲}) =$

حاصل $\frac{۱}{۴}\,(\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲} + \text{جم}\,\frac{\text{س}}{۲})\,(\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲} + \text{جم}\,\frac{\text{س}}{۲}$

$- \text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲}) \times (\text{جم}\,\frac{\text{ا}}{۲} + \text{جم}\,\frac{\text{س}}{۲} - \text{جم}\,\frac{\text{ب}}{۲})$

$\left(\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}+\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}-\text{جم}\frac{\text{س}}{۲}\right)$ اب ان مثالوں کی جگہہ ان نتایج کو رکہو جو کہ ۸ و ۱۲۰ اور ۱۲ مین دی گئی ہین - اس طرح سے ہم حاصل کرینگے

$$\left\{۸\,\text{جم}\frac{\pi-\text{ا}}{۴}\,\text{جم}\frac{\pi-\text{ب}}{۴}\,\text{جم}\frac{\pi-\text{س}}{۴}\,\text{جم}\frac{\pi+\text{ا}}{۴}\times\right.$$

$$\left.\text{جم}\frac{\pi+\text{ب}}{۴}\,\text{جم}\frac{\pi+\text{س}}{۴}\right\}^{۲}$$

$$\text{یعنی}\left\{۸\,\text{جم}\frac{\pi-\text{ا}}{۴}\,\text{جم}\frac{\pi-\text{ب}}{۴}\,\text{جم}\frac{\pi-\text{س}}{۴}\,\text{جب}\frac{\pi-\text{ا}}{۴}\right.$$

$$\left.\text{جب}\frac{\pi-\text{س}}{۴}\right\}^{۲}$$

$$\text{یعنی}\left\{\text{جب}\frac{\pi-\text{ا}}{۲}\,\text{جب}\frac{\pi-\text{ب}}{۲}\,\text{جب}\frac{\pi-\text{س}}{۲}\right\}^{۲}$$

$$\text{یعنی}\ \text{جم}^{۲}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}^{۲}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جم}^{۲}\frac{\text{س}}{۲}$$

۳

$$\text{محیط}=\text{ا}+\text{ب}+\text{س}=\frac{\text{ر جب ا}}{\text{جب س}}+\frac{\text{ر جب ب}}{\text{جب س}}+\text{س}$$

$$=\frac{\text{ر}\,(\text{جب ا}+\text{جب ب}+\text{جب س})}{\text{جب س}}=\frac{۴\,\text{جم}\frac{\text{ا}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{ب}}{۲}\,\text{جم}\frac{\text{س}}{۲}}{\text{جب س}}$$

بموجب مثال ۸ و ۱۶

$$= \frac{۲\ جم\ \frac{ا}{۲}\ جم\ \frac{ب}{۲}}{جب\ \frac{س}{۲}} = \frac{۲\ جم\ \frac{ا}{۲}\ جم\ \frac{ب}{۲}}{جم\ \frac{ا+ب}{۲}} =$$

$$۲\ جم\ \frac{ا}{۲}\ جم\ \frac{ب}{۲}\ قع\ \frac{ا+ب}{۲}$$

س ۳۹

فرض کرو کہ ح = ی جب^{۲} ا + وجب^{۲} ب = زجب^{۲} ب +

ی جب^{۲} س

= وجب^{۲} س + زجب^{۲} ا اسطرح

ح (جب^{۲} س - جب^{۲} ا) = وجب^{۲} ب جب^{۲} س - زجب^{۲} ا جب^{۲} ب

اور ح = وجب^{۲} س + زجب^{۲} ا ∴ ح (جب^{۲} س

- جب^{۲} ا) + ح جب^{۲} ب = ۲ وجب^{۲} ب جب^{۲} س

∴ ح جب (س - ا) جب (س + ا) + ح جب^{۲} ب

= ۲ وجب^{۲} ب جب^{۲} س

∴ ح جب (س - ا) + ح جب (س + ا) =

۲ وجب ب جب^{۲} س ∴ وجب ب جب^{۲} س = ح جب س جم ا

$$∴ و = \frac{ح\ جم\ ا}{جب\ ب\ جب\ س} = \frac{ح\ جب\ ۲\ ا}{۲\ جب\ ا\ جب\ ب\ جب\ س}$$

$$ایساہی\ ی = \frac{ح\ جب\ ۲\ ب}{۲\ جب\ ا\ جب\ ب\ جب\ س}$$

اور ز = $\frac{ح\ جب\ ۲\ س}{۲\ جب\ ا\ جب\ ب\ جب\ س}$

س ۴۰

چونکہ ا + ب + س = π

اس لئے ہم ظاہر کرتے ہین کہ ۸ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{س}{۲}$
اپنی سب سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ ا اور ب اور س سب باہم
برابر ہون کیونکہ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ = جب $\left(\frac{ا+ب}{۴} + \frac{ا-ب}{۴}\right)$

جب $\left(\frac{ا+ب}{۴} - \frac{ا-ب}{۴}\right)$ = جب^{۲} $\frac{ا+ب}{۴}$

− جب^{۲} $\frac{ا-ب}{۴}$

اسی طرح س کے کوی سے قیمت ہو کہ جب $\frac{ا}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ اپنی
سب سے بڑی قیمت رکھتا ہے جبکہ ا = ب
کیونکہ جب $\frac{ا+ب}{۴}$ نہین بدلتا جبکہ ا اور ب اس طرح
بدلتے ہین جیسا کہ س متغیر نہ ہو +
اس طریقہ مین ہم دیکھتے ہین کہ بڑی قیمت اس مثال کی اس
وقت ہے جبکہ تمام زوایا برابر ہون اور تب قیمت ۸ جب^{۳}
$\frac{\pi}{۶}$ یعنے ایک ہے +

س ۴۱

ک سے وہی مراد ہے جو مثال ۸۲ کی حل مین ہے تو
ا جب (ب − س) جم (ب + س − ا) =

ک جب ا جب (ب - س) جم (۱۸۰° - ۲ ا)

= - ک جب (ب + س) جب (ب - س) جم ۲ ا

= ک (جب² ب - جب² س) (۲ جب² ا - ۱) =

۲ ک جب² ا (جب² ب - جب² س) - ک (جب² ب

- جب² س) اسیطرح باقی کی دو مثالین عمل کرنے سے

صورت بدل سکتے ہین ∴ اور تب سب کی سب صفر ہو جائینگی

کیونکہ جب² ا (جب² ب - جب² س) + جب² ب (جب² س

- جب² ا) + جب² س (جب² ا - جب² ب) = ۰

اور جب² ب - جب² س + جب² س - جب² ا +

جب² ا - جب² ب = ۰

س ۲۴

جب ا / جم ب + جب ب / جم ا = (جب ا جم ا + جب ب جم ب) / (جم ا جم ب)

= (جب ۲ ا + جب ۲ ب) / (۲ جم ا جم ب)

= ۲ جب (ا + ب) جم (ا - ب) / (۲ جم ا جم ب) = جب س / (جم ا جم ب) ×

(جم ا جم ب + جب ا جب ب)

= جب س + جم س مس ا مس ب مس س

اسیطرح جب ب / جم س + جب س / جم ب = جب ا + جم ا مس ا مس ب مس س

اور جب س / جم ا + جب ا / جم س = جب ب + جم ب مس ا ×
مس ب مس س

اِسجگہہ نتیجہ مطلوب کو جمع کرنے سے ہم نتیجۂ مطلوب حاصل
کرتے ہین +

سوالات نمبر ۱۳

س ۱ جب ا = اَ/بَ جب ب = ٥/٢٫٥ ٫٢٥ = ١/٢
∴ ا = ٣٠° یا ١٥٠°

س ۲ فرض کرو کہ سَ = ١/٢ بَ اور ا = ٦٠° تو بموجب دفعہ ١٨٣
مس ١/٢ (ب − س) = (بَ − سَ)/(بَ + سَ) مم ١/٢ ا = (١ − ١/٢)/(١ + ١/٢) مم ٣٠°
= ١/√٣ = ٫٥٧٧٣ = ١/√٣
∴ ١/٢ (ب − س) = ٣٠° اور ١/٢ (ب + س) = ٦٠°
∴ ب = ٩٠° اور س = ٣٠°

س ۳ فرض کرو کہ اَ و بَ و سَ ظاہر کرتے ہین ضلعون کو علی الترتیب

توجم ا $= \dfrac{ب^۲ + س^۲ - ا^۲}{۲ ب س} = \dfrac{۶ + (۱ + \sqrt{۳})^۲ - ۴}{۲ (۱ + \sqrt{۳}) \sqrt{۶}}$

$= \dfrac{۶ + ۲\sqrt{۳}}{۲(۱ + \sqrt{۳})\sqrt{۶}}$

$= \dfrac{\sqrt{۳}(۱ + \sqrt{۳})}{\sqrt{۶}(۱ + \sqrt{۳})} = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \quad \therefore ا = ۴۵^\circ$

جم ب $= \dfrac{ا^۲ + س^۲ - ب^۲}{۲ ا س} = \dfrac{۴ + (۱ + \sqrt{۳})^۲ - ۶}{۴(۱ + \sqrt{۳})}$

$= \dfrac{۲ + ۲\sqrt{۳}}{۴(۱ + \sqrt{۳})} = \dfrac{۱}{۲} \therefore ب = ۶۰^\circ$

جم س $= \dfrac{ا^۲ + ب^۲ - س^۲}{۲ ا ب} = \dfrac{۴ + ۶ - (۱ + \sqrt{۳})^۲}{۴\sqrt{۶}} =$

$\dfrac{۶ - ۲\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۶}} = \dfrac{۳ - \sqrt{۳}}{۲\sqrt{۶}}$

$= \dfrac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}} \therefore س = ۷۵^\circ$

س ۴ جب ب $= \dfrac{ب}{ا}$ جب ا $= \dfrac{۱۰۰}{۴۰} \times \dfrac{۱}{۲} = \dfrac{۵}{۴}$

لیکن یہہ ناممکن ہے کیونکہ کوئی جب اکائی سے زیادہ نہین ہوسکتی ۔

س ۵ جب ب $= \dfrac{ب}{ا}$ جب ا $= \dfrac{\sqrt{۸۰} + ۴}{۴}$ جب ۱۸°

$= \{۱ + \sqrt{۵}\}$ جب ۱۸°

س ٦

= (١ + √٣)(√٣ − ١) / ٤ = ١ ∴ ب = ٩٠°

اِسلیے س = ٢ ٢° ، اور سَ٢ = بَ٢ − اَ٢

= {٤ + ٤√٣}٢ − ١٦

= ٨٠ + ٣٢√٣ = ١٦ {٥ + ٢√٣}

∴ سَ = ٤√(٥ + ٢√٣)

جب ب = (بَ / اَ) جب ا = ((٤ + ٤√٣) / ٤) جب ١٥°

= (١ + √٣) (√٣ − ١) / (٢√٢) = ١ / √٢

∴ ب = ٤٥° یا ١٣٥°

اگر ب = ٤٥° تو س = ١٢٠° ، اور سَ = اَ جب س / جب ا

= ٤ × (٢√٢ / (√٣ − ١)) × (√٣ / ٢)

= ٤√٦ / (√٣ − ١) = ٤√٦ (√٣ + ١) / ٢ = ٢√٦ (√٣ + ١)

اگر ب = ١٣٥° تو س = ٣٠° ، اور سَ = اَ جب س / جب ا

= ٤ × (٢√٢ / (√٣ − ١)) × ١/٢

= ٤√٢ / (√٣ − ١) = ٤√٢ (√٣ + ١) / ٢ = ٢√٢ (√٣ + ١)

س دفعہ ۱۸۸ کی پہلی شکل مین ہم سَ کو مساوی رکھتے ہین ا ب
اور سً = ا بً
اِسیطرح سَ = بَ جم ا - اَ جم س ب بً اور سً
= بَ جم اَ + اَ جم س ب بً
∴ سَ + سً = ۲ بَ جم ا
اور سَ سً = بَ۲ جم۲ ا - اَ۲ جم۲ س ب ب
= بَ۲ جم۲ ا - اَ۲ جم۲ ب
= بَ۲ (ا - جب۲ ا) - اَ۲ (ا - جب۲ ب)
= بَ۲ - اَ۲
اِسلیے (سَ + سً)۲ = ۴ بَ۲ جم۲ ا
۴ سَ سً جم۲ ا = ۴ (بَ۲ - اَ۲) جم۲ ا ∴ سَ۲ + ۲ سَ سً
+ سً۲ - ۴ سَ سً جم۲ ا = ۴ اَ۲ جم۲ ا
یعنے سَ۲ - ۲ سَ سً جم ۲ ا + سً۲ = ۴ اَ۲ جم۲ ا

ش مثال بالا کی حل کی طرف متوجہ ہونے سے چھوٹے مثلث
کا رقبہ سَ/۲ بَ جب ا ہے اور بڑے کا رقبہ سً/۲ بَ جب ا
اِسلیے حاصل جمع رقبون کی = ۱/۲ (سَ + سً) ب جب ا
= بَ جب ا جم ا

س ۹

دو اوپر کی مثالون کے حل کی طرف متوجہ ہونے سے ہم رکھتے ہین جب $\frac{\text{س۱}}{\text{جب ب۱}} = \frac{\text{سَ}}{\text{ب}}$ اور $\frac{\text{جب س۲}}{\text{جب ب۲}} = \frac{\text{سً}}{\text{ب}}$

$$\therefore \frac{\text{جب س۱}}{\text{جب ب۱}} + \frac{\text{جب س۲}}{\text{جب ب۲}} = \frac{\text{سَ} + \text{سً}}{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{۲ بَ جم ا}}{\text{ب}} = \text{۲ جم ا}$$

س ۱۰

آٹھوین مثال کے حل کرنے کے مانند ہم رکھتے ہین

$$\tfrac{1}{2}\ \text{سً بَ جب ا} = \tfrac{\text{ن}}{2}\ \text{سَ بَ جب ا}$$

$$\therefore \text{سً} = \text{ن سَ}$$

اور نوین مثال کیطرح

$$\frac{\text{سَ} + \text{سً}}{\text{سً} - \text{سَ}} = \frac{\text{۲ بَ جم ا}}{\text{۲ اَ جم س ب بً}}$$

$$\therefore \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} = \frac{\text{ن} + ۱}{\text{ن} - ۱} \times \frac{\text{جم س ب بً}}{\text{جم ا}}$$

لیکن زاویہ س ب بً بڑا ہے بہ نسبت ا کے

$\therefore \frac{\text{جب س ب بً}}{\text{جم ا}}$ کم ہے اکائی سے

یہان $\frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ کم ہے $\frac{\text{ن} + ۱}{\text{ن} - ۱}$ سے

س ۱۵	سب سے بڑا زاویہ ۶۶ والے ضلع کے سامنے ہے فرض کرو کہ یہہ زاویہ س ہے تو مم $\frac{س}{۲} = \sqrt{\frac{ص(ص-س)}{(ص-لَ)(ص-ب)}}$ یہاں ص = ۶۹ اور ص - لَ = ۳۷ اور ص - ب = ۲۹ اور ص - س = ۳ ∴ مم $\frac{س}{۲} = \sqrt{\frac{۳ \times ۶۹}{۲۹ \times ۳۷}} = \sqrt{\frac{۲۰۷}{۱۰۷۳}}$ ∴ ل مم $\frac{س}{۲}$ = ۱۰ + لوگ $\sqrt{\frac{۲۰۷}{۱۰۷۳}}$ = ۱۰ + $\frac{۱}{۲}$ (لوگ ۲۰۷ - لوگ ۱۰۷۳) = ۹٫۶۴۲۳۶۰۵۳ ۹٫۶۴۲۳۶۸۵۳ ۱۳۳۳ ۰۰۰۰٫۰۰۰۲۵۱۱ : ۰٫۰۰۰۰۳۳۳ :: ۶۰" : وَ ۹٫۶۴۲۳۳۳۴۲ ۰٫۰۰۰۲۵۱۱ ∴ وَ = ۴ء۴ ∴ $\frac{س}{۲}$ = ۶۶° ۸' - ۴ء۴ = ۶۶° ۷' ۵۶ء۶ ∴ س = ۱۳۲° ۱۴' ۴ء۳"
س ۱۶	ص = $\frac{۱۵}{۲}$ اور ص - لَ = $\frac{۷}{۲}$ اور ص - ب = $\frac{۵}{۲}$ اور ص - س = $\frac{۳}{۲}$ جم $\frac{س}{۲} = \sqrt{\frac{ص(ص-ب)}{لَ س}} = \sqrt{\frac{۵ \times ۱۵}{۱۲ \times ۸}}$

= ما $\sqrt{\frac{۲۵}{۳۲}}$ = ما $\sqrt{\frac{۱۰۰}{(۲)^۷}}$

ل جم $\frac{ب}{۲}$ = ۱۰ + لوگ ما $\sqrt{\frac{۱۰۰}{(۲)^۷}}$ = ۱۰ + $\frac{۱}{۲}$ (لوگ ۱۰۰ − لوگ ۲^۷)

= ۱۰ + ۱ − $\frac{۷}{۲}$ لوگ ۲ = ۹٫۹۴۷۳۹۵۰

۹٫۹۴۷۴۰۴۰
۹٫۹۴۷۳۹۵۰ ۶۶۹ ... ۰٫: ۹۰ ... ۰٫ :: ۶۰: ۳ؔ: د

۰٫۰۰۰۰۰۹۰ ∴ د = ۸

∴ $\frac{ب}{۲}$ = ۲۰° ۴۲′ ۸″ ∴ ب = ۴۱° ۲۴′ ۱۶″

س ۱۷

اِسجگہ ر = ۷ اور س = ۹ اور س − ر = ۲

اِسلئے جم $\frac{ر}{۲}$ = ما $\sqrt{\frac{۲ \times ۹}{۹ \times ۵}}$ = ما $\sqrt{\frac{۲}{۵}}$ = ما $\sqrt{\frac{۴}{۱۰}}$

اِسلئے ل جم $\frac{ر}{۲}$ = ۱۰ + لوگ ما $\sqrt{\frac{۴}{۱۰}}$ = ۱۰ +

$\frac{۱}{۲}$ (لوگ ۴ − لوگ ۱۰)

= ۱۰ + $\frac{۱}{۲}$ لوگ ۴ − $\frac{۱}{۲}$ = ۹٫۸۸۹۰۷۵۶

۹٫۸۸۹۰۷۵۶
۹٫۸۸۹۰۶۴۴ ۱۰۳۲ ... ۰٫ : ۱۱۲ ... ۰٫ :: ۶۰: ۳ؔ

۰٫۰۰۰۰۱۱۲ ∴ د = ۶٫۵

اسلئے $\frac{ج}{۲}$ = ۹° ۳۴' ۱۴" − ۰٫۶۵" = ۹° ۳۴' ۱۳٫۳۵"

∴ ج = ۱۹° ۸' ۲۶٫۷"

ش ۱۸

بموجب دفعہ ۱۹۲ کے

مس $\frac{۱}{۲}$(ب − س) = $\frac{۱۸ - ۲}{۱۸ + ۲}$ مم $\frac{ج}{۲}$ = $\frac{۸}{۱۰}$ مم ۹° ۳۴'

اسلئے ل مس $\frac{۱}{۲}$(ب − س) = ل مم ۹° ۳۴' ۱۳٫۳"

+ لوگ ۸ − لوگ ۱۰

= ل مم ۹° ۳۴' ۱۳٫۳" + ۳ لوگ ۲ − ۱ = ۱۰٫۱۸۶۶۱۳۳

۱۰٫۱۸۶۶۱۳۳

۱۰٫۱۸۶۳۷۶۹ ‏ ۰۰۰۲۷۶۳ : ۰۰۰۲۳۶۴ :: ۶۰" : د"

۰۰۰۲۳۶۴ ∴ د = ۵۱

اسلئے $\frac{۱}{۲}$(ب − س) = ۶۵° ۵۴' ۵۱"

اور $\frac{۱}{۲}$(ب + س) = ۲۹° ۰ ۳۰' اسلئے ب = ۹۵° ۱۱' ۲۶"

۱۵" اور س = ۵° ۳۳' ۹"

ش ۱۹

مس $\frac{۱}{۲}$(ب − س) = $\frac{۹ - ۷}{۹ + ۷}$ مم $\frac{ج}{۲}$ = $\frac{۱}{۸}$ مم ۲° ۳۴' ۶"

اسلئے ل مس $\frac{۱}{۲}$(ب − س) = ل مم ۲° ۳۴' ۶" − لوگ ۸

= ل مس ۸۷° ۲۵' ۵۴" − ۳ لوگ ۲ = ۹٫۲۹۹۴۳۵۵

۹٫۲۹۹۹۸۰۴	۹٫۲۹۹۴۳۵۵
۹٫۲۹۹۳۲۱۶	۹٫۲۹۹۳۲۱۶
٫۰۰۰۶۵۸۸	٫۰۰۰۱۱۳۹

٫۰۰۰۶۵۸۸ : ٫۰۰۰۱۱۳۹ :: ۶۰″ : ی″ ∴ ی = ۱۰″

اسلئے ½ (ب − س) = ۱۱° ۱۴′ ۱۰″

اور ½ (ب + س) = ۷۵ ۴۵′ اسلئے ب =

۸۶° ۵۹′ ۱۰″ اور س = ۶۴° ۳۴′ ۵۰″

مثال ۲۰

مس ½ (ا − ب) = (ق − پ)/(ق + پ) مم س/۲ = (۳۵ − ۶۰)/(۳۵ + ۶۰) *

مم س/۲ = ⅓ مم ۱۸° ۲۶′ ۶″

اسلئے ل مس ½ (ا − ب) = ل مم ۱۸° ۲۶′ ۶″ − لوگ ۳ = ۱۰

اسلئے لوگ مس ½ (ا − ب) = ۰

اسلئے مس ½ (ا − ب) = ۱ ∴ ½ (ا − ب) = ۴۵°

اور ½ (ا + ب) = ۷۱° ۳۳′ ۵۴″ ∴ ا = ۱۱۶°

۳۳′ ۵۴″ اور ب = ۲۶° ۳۳′ ۵۴″

مثال ۲۱

مس ½ (ب − س) = (۹ − ۷)/(۹ + ۷) مم ا/۲ = ⅛ مم ۳۱° ۴۲′ ۴۲″ ۳۰‴

اسلئے ل مس $\frac{۱}{۲}$ (ب − س) = ل مم ۳۲° ۲۴′ ۰٫۴″ − لوگ ۹

= ل مس ۶۶° ۱۱′ ۰٫۳″ − ۲ لوگ ۲ = ۹٫۶۴۵۴۳۰۴۲

۹٫۶۴۵۴۳۰۴۲

۹٫۶۴۵۴۱۴۷۹

٫۰۰۰۱۵۶۳

٫۰۰۰۴۷۹۷ : ٫۰۰۰۱۵۶۳ :: ۱۰″ : ۳″٫۲ = ۳″٫۲

اسلئے $\frac{۱}{۲}$ (ب − س) = ۱۵° ۳۵′ ۰٫۲″

اور $\frac{۱}{۲}$ (ب + س) = ۶۶° ۱۱′ ۰٫۳″ : ب = ۸۲° ۱۰′ ۵″

اور س = ۵۰° ۳۴′ ۱٫۰″

مث ۲۲

مس $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = $\frac{ا′ − ب′}{ا′ + ب′}$ مم $\frac{س}{۲}$ = $\frac{۳۰ − ۲۰}{۳۰ + ۲۰}$ مم $\frac{س}{۲}$

= $\frac{۲}{۱۰}$ مم ۱۱°

اسلئے ل مس $\frac{۱}{۲}$ (ا − ب) = ل مم ۱۱° + لوگ ۲ − لوگ ۱۰

= ل مم ۱۱° + لوگ ۲ − ۱

= ۱۰٫۰۱۲۳۷۷۷

۱۰٫۰۱۲۳۸۲۱	۱۰٫۰۱۲۳۷۷۷
۱۰٫۰۱۲۱۲۹۴	۱۰٫۰۱۲۱۲۹۴
٫۰۰۰۲۵۲۷	٫۰۰۰۲۴۸۳

٦٢٥٢٠٠٠٦ : ٣٨٣٤٢٠٠٠١ : ٠٦″ : ڈ : و = ٦٥°

اِسلئے ½ (ا − ب) = ٥° ٨ ٤٤′ ٩ ٥″

اور ½ (ا + ب) = ٩٠° ∴ ا = ٤٢° ١٨ ٤٤′ ٩ ٥″ اور ب = ٣٤° ١١ ١″

س ٢٣

مس ½ (ب − س) = (ب − س)/(ب + س) مم ا/٢ = ٣/٢٥ مم ٣٠°

= ٣√٣/٢٥

∴ ل مس ½ (ب − س) = ١٠ + لوگ ٣√٣/٢٥ = ١٠ + ³⁄₂ لوگ ٣ − لوگ ٢٥

= ١٠ + ³⁄₂ لوگ ٣ − لوگ ١٠٠/٤ = ١٠ + ³⁄₂ لوگ ٣ − ٢ + ٢ لوگ ٢

= ٩٫٣١٧٧٤

∴ ½ (ب − س) = ١١° ٤٤′ ٢٩″

اور ½ (ب + س) = ٦٠° ∴ ب = ٧١° ٤٤′ ٢٩″

س ٢٤

فرض کرو کہ ا = ٧ اور ب = ٨ اور س = ٩ اور ص = ١٢ اور ص − ا = ٥ اور ص − ب = ٤ اور ص − س = ٣

$$\text{مس}\ \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ص}-\text{ب})(\text{ص}-\text{ج})}{\text{ص}(\text{ص}-\text{ا})}} = \sqrt{\frac{۳\times۴}{۵\times۱۲}} =$$

$$\sqrt{\frac{۱}{۵}} = \sqrt{\frac{۲}{۱۰}}$$

$$\text{لمس}\ \frac{\text{ا}}{۲} = ۱۰ + \text{لوگ}\ \sqrt{\frac{۲}{۱۰}} = ۱۰ + \frac{۱}{۲}(\text{لوگ}\ ۲ - \text{لوگ}\ ۱۰)$$

$$= ۱۰ + \frac{۱}{۲}(\text{لوگ}\ ۲ - ۱) = ۹٫۶۵۰۵۱۵۰$$

۹٫۶۵۰۵۱۳۴	۹٫۶۵۰۵۱۵۰
۹٫۶۵۰۵۰۶۹	۹٫۶۵۰۵۰۶۹
۰٫۰۰۰۰۰۶۵	۰٫۰۰۰۰۰۸۱

۰٫۰۰۰۰۰۶۵ : ۰٫۰۰۰۰۰۸۱ :: ۱۰″ : ی″ ∴ ی = ۱۲٫۵

∴ $\frac{\text{ا}}{۲}$ = ۲۴° ۵′ ۱۲٫۵″ ∴ ا = ۴۸° ۱۱ ۲۳

$$\text{مس}\ \frac{\text{ب}}{۲} = \sqrt{\frac{(\text{ص}-\text{ا})(\text{ص}-\text{ج})}{\text{ص}(\text{ص}-\text{ب})}} = \sqrt{\frac{۳\times۵}{۴\times۱۲}}$$

$$= \sqrt{\frac{۵}{۱۶}} = \sqrt{\frac{۱۰}{۳۲}}$$

$$\text{لمس}\ \frac{\text{ب}}{۲} = ۱۰ + \text{لوگ}\ \sqrt{\frac{۱۰}{۳۲}} = ۱۰ + \frac{۱}{۲}(\text{لوگ}\ ۱۰ -$$

$$\text{لوگ}\ ۳۲)$$

$$= ۱۰ + \frac{۱}{۲} - \frac{۵}{۲}\ \text{لوگ}\ ۲ = ۹٫۷۴۷۴۸۵۰$$

۹،۷۴۷۴۶۷۷   ۹،۷۴۷۴۲۵۰

۹،۷۴۷۴۱۸۳   ۹،۷۴۷۴۱۸۳

،۰۰۰۰۴۹۴   ،۰۰۰۰۰۶۷

۴۹۴ ۰۰۰۰، : ،۰۰۰۰۰۶۷ :: ۱۰۰″ : لا″ ∴ لا = ۱۱۵

∴ ب/۲ = ۲۹° ۱۲′ ۵۱″٫۷ ∴ ب = ۵۸° ۲۵′ ۴۳″٫۴

اِس جگہ س = ۱۸۰° − ۸۴° ۱۱′ ۳۳″ − ۵۸° ۲۵′ ۴۳″٫۴

= ۳۷° ۲۳′ ۴۵″

س ۲۵ ۹۲ اِسی مانند ہم رکھتے ہیں جب (۴۵° − ب/۲) = $\sqrt{\frac{۱ - جب\ ب}{۲}}$

= $\sqrt{\frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۳}{۴۹۵۳}\right)}$

= $\sqrt{\frac{۱}{۲} \times \frac{۴۹۵۰}{۴۹۵۳}}$ = $\sqrt{\frac{۲۴۷۵}{۴۹۵۳}}$

∴ ل جب (۴۵° − ب/۲) = ۱۰ + لوگ $\sqrt{\frac{۲۴۷۵}{۴۹۵۳}}$

= ۱۰ + ½ لوگ (۲۴۷۵ − لوگ ۴۹۵۳) = ۱۰ − ½

(۰٫۳۰۱۲۱۷۴)

= ۹٫۸۴۹۳۹۱۳

۹٫۸۴۹۳۹۱۳

۹٫۸۴۹۳۹۰۲   ۱۱ ۰۰۰۰۰۰، : ۱۱ ۰۰۰۰۰، :: ۱″ : لا

،۰۰۰۰۰۱۱   ∴ لا = ۶۵

∴ ۵۰° ۴ − ب/۲ = ۴° ۴ ۹ ۵ ۱۰، ۵۱ ∴ ب/۲ = ۱۵، ۴ ۴

∴ ب = ۱ ۹ ۲

س ۲۶

فرض کرو کہ بَ = ۱۰۰ اور سَ = ۸۰

مس ۱/۲ (ب − س) = (بَ − سَ)/(بَ + سَ) مم جَ/۲ = ۱/۹ مم ۳۰

= ۳/۴ ۳/۲ = ۳√۳/۹

∴ ل مس ۱/۲ (ب − س) = ۱۰ + لوگ (۳)^(-۳/۲) = −۱۰

۳/۲ لوگ ۳ = ۲۳۴۸۲، ۹

∴ ۱/۲ (ب − س) = ۱۰° ۳ ۵ ۲ اور ۱/۲ (ب + س)

= ۹۰° ∴ ب = ۱۰۰° ۳ ۵ ۲ اور س = ۷۹° ۲ ۴۲

س ۲۷

فرض کرو کہ بَ = ۵ اور سَ = ۳

مس ۱/۲ (ب − س) = (بَ − سَ)/(بَ + سَ) مم جَ/۲ = ۱/۴ مم ۳۰

= ۱/(۴√۳) = ۱/(۴√۳)

∴ ل مس ۱/۲ (ب − س) = ۱۰ + لوگ ۱/(۴√۳) − ۱۰

۱/۲ لوگ ۴۸ = ۱۰ − ۱/۲ (۱۲۳۱۲۸۱۶۱۱) = ۹،۱۵۹۳۷۹۴

۹٫۱۵۹۳۷۹۴
۳٫۹۰٫۰۰۱٫۰۰۰۷۸۸٫۰۰۰٫۰۰۸۹۳۰
۹٫۱۵۸۸۷۰۹

۸۸۰۷۰۰۱ ∴ و = ۸۸۴

∴ ½ (ب – س) = ۸° ۱۲′ ۸″ اور ½ (ب + س) = ۵۰°

∴ ب = ۵۸° ۱۲′ ۸″ اور س = ۴۱° ۴۷′ ۵۲″

شق ۲

فرض کرو کہ ا ب س مربع قاعدہ کو ظاہر کرتا ہے اور پ سمت الراس ہے جسے پ ق عمود زمین پر کھینچا ہوا فرض کرو۔
ق سے ق ر عمود ا ب پر کھینچو

فرض کرو کہ پ ظاہر کرتا ہے رقم مطلوبہ کو تو سس پ = $\frac{پ ق}{ق ر}$

اب ق ر = ۱۰۰ نیز (پ ق)^2 + (ق ر)^2 = (پ ر)^2

اور (پ ر)^2 + (ا ر)^2 = (ا پ)^2

اسیطرح (پ ق)^2 = (پ ر)^2 – (ق ر)^2 =

(ا پ)^2 – (ا ر)^2 – (ق ر)^2 = (۱۵۰)^2 – (۱۰۰)^2

= ۲۵۰۰

∴ پ ق = ۵۰

∴ مس پ = ۵۰/۱۰۰ = ۱/۲

اسلئے لمس پ = ۱۰ + لوگ ۱/۲ = ۱۰ − لوگ ۲

= ۹٫۶۹۸۹۷

۹٫۶۹۹۰۰ ۹٫۶۹۸۹۷

۹٫۶۹۸۶۸ ۹٫۶۹۸۶۸

٫۰۰۰۳۲ ٫۰۰۰۲۹

٫۰۰۰۳۲ : ٫۰۰۰۲۹ :: ۶۰″ : ثانیہ = ۵۴

∴ پ = ۲۶° ۳۳′ ۵۴″

۹ مس ۱/۲ (ا − پ) = (ا − ب)/(ا + ب) مم ج/۲ = (۱ − ۱ ۲/۹)/(۱ + ۱ ۲/۹)

مم ۳۰° = ۱/۱۱ مم ۳۰° = ۳۱۴/۱۰

∴ لمس ۱/۲ (ا − ب) = ۱۰ + لوگ ۳۱۴/۱۰ =

۱۰ + ۱/۲ لوگ ۳ − ۱ = ۹٫۲۳۸۵۷۰۹

اب ل مم ۹° ۹′ = ۱۰٫۷۶۱۸۵۹۷

اور جبکہ مس ۵ × مم ۵ = ۱ تو ہم رکھتے ہیں

لوگ مم ۵ + لوگ مس ۵ = ۰

∴ ل مس ۵ − ۱۰ + ل مم ۵ − ۱۰ = ۰

∴ ل مس ۵ = ۲۰ − ل مم ۵

اسیطرح لس ۹ ۹٫۹ = ۳٫۲۰۳۸۱۲۰۳ ۹٫۰

۹٫۲۳۸۵۴۰۶

۹٫۰۹۰۶ : ۵١٤...٠٠٠٠١: ۳٠٣٤۳٤...٠٠٠

۹٫۲۳۸۱۲۰۳

۰٠۰۰۳۴۰۳ ، ۰٫۰ = ۳۵

$\therefore \frac{1}{2}$ (ا - ب) = ۹ ۹٫۹ ۵۳ اور $\frac{1}{2}$ (ا + ب) = ۹٫۰

$\therefore$ ا = ۹ ۹٫۹ ۵۳ اور ب = ۵ ۱۰ ۵۳

س ۳	جب س = $\frac{\text{م}}{\text{ل}}$ جب ا اور ل جب س = ل جب ا + لوگ س – لوگ ا = ل جب ا + لوگ ۳ – لوگ ۷ = ۹٫۵۲۲۸۷۸۷ + ۱۲۱۳ ، ۷۷۳٤ – لوگ ۲ = ۱۰ – لوگ ۲ $\therefore$ لوگ جب س = – لوگ ۲ = لوگ $\frac{1}{2}$ $\therefore$ جب س = $\frac{1}{2}$ $\therefore$ جب س = ۳۰ اور ۱۵۰
س ۱۳	فرض کرو کہ س ظاہر کرتا ہے قاعدہ کو - اور ح ارتفاع معلوم کو بموجب دفعہ ۱۶۰ کے بائیں طرف کی شکل کو ہم رکھتے ہیں مم ب = $\frac{\text{ب و}}{\text{ح}}$ اور مم س = $\frac{\text{س ح}}{\text{ح}}$ $\therefore$ مم ب + مم س =

$\frac{ب و + س و}{ح} = \frac{س ی}{ح}$ ۰۰۰۰۰(۱)

نیز ب − س فرضاً ہمین معلوم ہے
∴ مم (ب − س) بہی معلوم ہوگئی اس کو م سے تعبیر
کرو ∴ $\frac{مم ب − مم س}{۱ + مم ب مم س} = م$ ۰۰۰۰۰(۲)

پہلی اور دوسری مساوات سے ہم مم ا اور مم ب معلوم
کر سکتے ہین +

س ۲۲ فرض کرو کہ ا اور ب اور س ضلعون کو ظاہر کرتے ہین
اور ل اور م اور ن جداگانہ مقابل کے زاویون سے ان پر عمود
ہین تو ا ل = ب م = س ن اس لئے کہ ہر ایک اِن مثالون
مین سے مثلث کا دو گنہ رقبہ ظاہر کرتا ہے اس لئے اضلاع
ا اور ب اور س عمود ہائے ل اور م اور ن سے معکوساً
متناسب ہین اسیطرح اضلاع کی نسبتین معلوم ہوگئین
اور اس لئے مثلث کے زاویہ بہی دفعہ، اسکے ذریعہ سے
معلوم ہو سکتے ہین تب ضلعون کے حقیقی طول دریافت
کر سکتے ہین کیونکہ ل = س جب ب اور ل اور ب معلوم

ہین لپس سَ معلوم ہو جائیگا
تب تَ اور بَ نتیجہ سے معلوم ہوسکتی ہین جبکہ ضلعون کے
نسبتین معلوم ہین ٭

باب چہاردہم

س ۱ دیکھو دفعہ ۱۹۳ کی شکل کو زاویہ پ ب س = ۹۰
اور زاویہ ب ا س = ۳۰ ∴ ا پ ب = ۳۰
نیز ا ب = ۴۰ فٹ چونکہ پ ا ب زاویہ = ا پ ب زاویہ
تو ہم رکھتے ہین پ ب = ا ب = ۴۰ تب پ
س = پ ب جب ۶۰ = ۴۰ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ۲۰ $\sqrt{3}$
اور ب س = ب پ جم ۶۰ = ۴۰ × $\frac{1}{2}$
= ۲۰

س ۲ فرض کرو کہ اس بڑھانے سے سَ مین گذر کر اس افقی سطح
سے جو کہ بَ کو شامل ہے نقطہ و پر ملتا ہے تب زاویہ ا ب و
= ۴۵ اور زاویہ س ب و = ۳۰ ∴ زاویہ ا ب س
= ۱۵ اور ا س ب = ۵ ۱۵ ∴ زاویہ ب ا س

$$= ١٨٠° - ٣٠° - ١٣٥° = ١٥°$$

$$\frac{اب}{بس} = \frac{جب\ اس ب}{جب\ ب اس} = \frac{جب\ ١٣٥°}{جب\ ١٥°}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \div \frac{\sqrt{٣}-١}{٢\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٣}-١} \therefore اب = \frac{١٧٦٠ \times ٢}{\sqrt{٣}-١}$$ گز ون کے

اور پہاڑ کی بلندی $= اب\ جب\ ٦٠° = اب \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$$= \frac{١٧٦٠\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}-١} =$$

$$= \frac{١٧٦٠\sqrt{٣}(\sqrt{٣}+١)}{(\sqrt{٣}+١)(\sqrt{٣}-١)} = \frac{١٧٦٠\sqrt{٣}(\sqrt{٣}+١)}{٢}$$

$$= ٨٨٠(٣+\sqrt{٣})$$

س — فرض کرو کہ ح ظاہر کرتا ہے بلندی مینار کی گز ون مین تب

$\frac{ح}{١٠٠} = مس\ ٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}} \therefore ح = \frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$

س — فرض کرو کہ ح ظاہر کرتا ہے بلندی مینار کی اور اوسے جڑہ کے فاصلہ کو د ظاہر کرتا ہے اور ی ب سے جڑہ کے فاصلہ کو تو د = ح مم ٣٠° اور ی = ح مم ٦٠° لیکن ی − د

مین ہے جسمین ب و س ہین تو و اور پ اور ق ایک ایسے خط مستقیم ہین جو کہ ا ب سے زاویہ قایمہ بناتا ہے

اور فرض کرو کہ و پ = پ اور و ق = ق

فرض کرو کہ ا پ و = ا اور پ ق و = ب

تو و ا = پ مس ا اور و ب = ق مس ب

اِسیطرح ا ب = ق مس ب − پ مس ا

اور مثلث ا ب س کے زاوی معلوم ہین اسواسطے کہ

ا ب ق = $\frac{\pi}{2}$ − ب اور و ا پ = $\frac{\pi}{2}$ − ا

اس لیے ا س اور ب س معلوم کر سکتے ہین۔

سی

اس زاویہ کی مس جسکو و ب ی پر بناتا ہے = $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ی}}$ اور مس اس زاویہ کے جسکو س د ی پر بناتا ہے ٥ = $\frac{\text{س د}}{\text{س ی}}$ ∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ی}} = \frac{\text{س د}}{\text{س ی}}$ ∴ س ی = $\frac{\text{ا ی} \times \text{س د}}{\text{ا ب}}$ ∴ $(\text{س ی})^2 = \frac{(\text{ا ی})^2 \times (\text{س د})^2}{(\text{ا ب})^2}$

∴ $(\text{س ا})^2 + (\text{ا ی})^2 = \frac{(\text{ا ی})^2 \times (\text{س د})^2}{(\text{ا ب})^2}$

لیکن (س و)^2 = (اب)^2 ∴ ای^2 = $\frac{\text{اب}^2}{(\text{س و})^2 - (\text{اب})^2}$

پہر جم ری ا = $\frac{\text{ی ا}}{\text{ی و}}$

اور جم ب ی س = $\frac{(\text{ی ب})^2 + (\text{ی س})^2 - (\text{ب س})^2}{\text{۲ ی ب × ی س}}$

= $\frac{(\text{ی ا})^2 + (\text{اب})^2 + (\text{ی ا})^2 + (\text{ا س})^2 - \{(\text{اب})^2 + (\text{ا س})^2\}}{\text{۲ ی ب × ی س}}$

= $\frac{(\text{ی ا})^2}{\text{ی ب × ی س}}$

لیکن فکر سے جم ب ی ا = جم و ی س

یعنے $\frac{\text{ی ا}}{\text{ی ب}}$ = $\frac{\text{ی س}}{\text{ی و}}$ ∴ ی ا × ی و = ی ب × ی س

∴ $\frac{(\text{ی ا})^2}{\text{ی ب × ی س}}$ = $\frac{\text{ی ا}}{\text{ی و}}$

۳۵ فرض کرو کہ علم کی چوٹی ا ہے اور ب مینار کی چوٹی ہے اور س مینار کے جڑہ اور ی آنکھ اور ی سے ی د اس افستی پیر جو س مین سے گذرتی ہے عمود کہینچو

تو زاویہ ب ی س = ب ی ا

اب $\frac{\text{جب ب ی س}}{\text{جب ی ب س}}$ = $\frac{\text{ب س}}{\text{ی س}}$

اور $\frac{\text{جب ب ی ا}}{\text{جب ی ب ا}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ی}}$

$\therefore \frac{\text{ب س}}{\text{ی س}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ی}}$

یہہ اقلیدس م۳ ش۶ کے مطابق ہے ۔

فرض کرو کہ س و = د تو ی س = $\sqrt{\text{ح}^2 + \text{د}^2}$

اور ی ا = $\sqrt{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 + \text{د}^2}$

$\therefore \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ح}^2 + \text{د}^2}} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 + \text{د}^2}}$

$\therefore \{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 + \text{د}^2\}\, \text{ب}^2 = (\text{ح}^2 + \text{د}^2)\, \text{ا}^2$

$\therefore \text{د}^2 = \frac{\text{ب}^2(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 - \text{ح}^2 \text{ا}^2}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

$\therefore (\text{ی س})^2 = \frac{\text{ح}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2) + \text{ب}^2(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 - \text{ح}^2 \text{ا}^2}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

$= \frac{\text{ب}^2\{(\text{ا} + \text{ب} - \text{ح})^2 - \text{ح}^2\}}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

$= \frac{\text{ب}^2(\text{ا} + \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - ۲\text{ح})}{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}$

سں ۹

$= \frac{ب^۲ (اَ + بَ - ۲ ح^۲)}{اَ - بَ}$

$\therefore ی س = ب \left\{ \frac{اَ + بَ - ۲ ح}{اَ - بَ} \right\}^{\frac{1}{2}}$

فرض کرو کہ پ ظاہر کرتا ہے مینار کی چوٹی کو اور پ سے زمین پر پ ق عمود کہینچو تو پ ق = ح

فرض کرو کہ د ظاہر کرتا ہے مینار کے قاعدہ سے ق کے فاصلہ کو اور د + اَ ق کا مشاہدہ کے ایک مقام سے فاصلہ ہے اور اسیطرح د + ب ق کا مشاہدہ کے دوسرے مقام سے فاصلہ ہے اسطرح

$مم ۵ = \frac{د}{ح}$

$مم اِ = \frac{د + اَ}{ح}$

$مم بِ = \frac{د + بَ}{ح} \quad \therefore ح \; مم اِ = د + اَ$

$ح \; مم بِ = د + بَ$

$\therefore ح = \frac{بَ - اَ}{مم بِ - مم اِ}$

$اور \; د = ح \; مم اِ - اَ = \frac{(بَ - اَ) \; مم اِ}{مم بِ - مم اِ} - اَ$

$= \frac{بَ \; مم اِ - اَ \; مم بِ}{مم بِ - مم اِ}$

سنہ ۱۰

اسیطرح مس ہ = $\frac{ج}{د}$ = $\frac{ب - ا}{ب مم ا - ا مم ب}$

فرض کرو کہ د بلندی مطلوب کو ظاہر کرتا ہے اور ہ

زاویہ ہے جو کہ مینار بناتا ہے

د = ب مس ہ

اور د + ا = ب مس (ہ + ج)

∴ د + ا = $\frac{ب (مس ہ + مس ج)}{ا - مس ہ مس ج}$ =

= $\frac{د + ب مس ج}{ا - \frac{د مس ج}{ب}}$

اس طرح ہم مساوات چوتھے درجہ کے د کے معلوم

کرنیکے واسطے رکھتے ہین +

سنہ ۱۱

فرض کرو کہ د ظاہر کرتا ہے دریا کی چوڑائی کو فٹون مین فرض

کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے اس زاویہ کو جو ستون سے نبتا ہے

اور ب وہ زاویہ ہے جو کہ ستون اور پتھر کی تصویر سے

نبتاہے +

اسیطرح مس ا = $\frac{۲۰۰}{د}$

اور مس ب = $\frac{۲۳۰}{د}$ ∴ مس (ب - ا) =

$$= \frac{\frac{\text{۲۳۰}}{\text{و}} - \frac{\text{۲۰۰}}{\text{و}}}{\text{۱} + \frac{\text{۲۳۰} \times \text{۲۰۰}}{\text{و}^{\text{۲}}}}$$

$$= \frac{\text{۳۰ و}}{\text{و}^{\text{۲}} + \text{۴۶۰۰۰}}$$ لیکن قیاس مس (ب − ل) =

$$\therefore \frac{\text{۶}}{\text{و}} = \frac{\text{۶}}{\text{و}} = \frac{\text{۳۰ و}}{\text{و}^{\text{۲}} + \text{۴۶۰۰۰}}$$

$$\therefore \text{و}^{\text{۲}} + \text{۴۶۰۰۰} = \text{۵ و}^{\text{۲}}$$

$$\therefore \text{و}^{\text{۲}} = \text{۱۱۵۰۰} \quad \therefore \text{و} = \text{۱۰} \sqrt{\text{۱۱۵}}$$

س ۱۲ گھر کا وہ حصہ جو افقی مستقیم خط کے اوپر واقع ہے ایک زاویہ ۶۰° کا بناتا ہے اور اس طرح گھر کی چوٹی کی بلندی دریچہ سے اوپر ۳۰ مس ۶۰° فٹ ہے اور گھر کا وہ حصہ جو کہ افقی مستقیم خط کے نیچے واقع ہے ایک زاویہ ۳۰° کا بناتا ہے اور اس طرح گھر کی بنیاد کا عمق دریچہ سے ۳۰ مس ۳۰° فٹ ہے اسلیے فاصلہ گھر کی بنیاد کا چوٹی سے فٹوں میں =

$$\text{۳۰} (\text{مس} \ \text{۶۰}^{\circ} + \text{۳۰}^{\circ}) = \text{۳۰} \left(\sqrt{\text{۳}} + \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۳}}}\right)$$

$$= \text{۳۰} \cdot \frac{\text{۴}}{\sqrt{\text{۳}}} = \text{۴۰} \sqrt{\text{۳}} \ \therefore$$

س ۱۳ ہر ایک آتشدان کی بلندی کو ق فٹ فرض کرو اور انکی درمیانی

فاصلہ کو ی فرض کرو ۔ مشاہدہ کے اول مقام کا قریب کے

آتشدان سے فاصلہ د مس ۶۰° ہے اور اس لئے مشاہدہ کے

دوسرے مقام کا فاصلہ √(۸۰)² + د² مم² ۶۰° ہے

اسطرح √(۸۰)² + د² مم² ۶۰° / د = مس ۴۵° = ۱ ∴ د² = (۸۰)² +

د² مم² ۶۰° = ۸۰² + د²/۳ ∴ ۲ د² = ۳ × (۸۰)²

∴ د² = ۶ (۴۰)² ∴

∴ د = ۴۰ √۶ ۔ مشاہدہ کے اول مقام کا دور کے

آتشدان سے ی ـ د مم ۶۰° ہے اور اسلئے مشاہدہ کے

دوسرے مقام کا فاصلہ √(۸۰)² + (ی ـ د مم ۶۰°)² اسطرح

√(۸۰)² + (ی ـ د مم ۶۰°)² / د = مس ۳۰° = ۱/√۳ ∴ ۳ د² = (۸۰)²

+ (ی ـ د مم ۶۰°)² ∴ ۱۶۰ (۴۰)² = (ی ـ د مم ۶۰°)² ∴ ی = د مم ۶۰°

+ ۴۰ √۱۶۰ = ۴۰ (√۲ + √۱۶۰) ۔

س ۱۹۱

فرض کرو کہ پ چنیر ہے اور پ ق کھمبے سے اس سطح افقی پر

عمود کھینچا ہوا فرض کرو جو کہ آ اد ب اور س کو شتمل ہے

فرض کرو پ ق = د اور س ق = ی

فرض کرو زاویہ پ اق کرہ

تو پ ب ق = ۲ ہ اور پ س ق = ۳ ہ

اسی طرح $\text{مس ه} = \dfrac{\text{د}}{\text{ی} + \text{اَ} + \text{بَ}}$

اور $\text{مس ۲ ه} = \dfrac{\text{د}}{\text{ی} + \text{بَ}}$ اور $\text{مس ۳ ه} = \dfrac{\text{د}}{\text{ی}}$

$\therefore \text{ی} + \text{اَ} + \text{بَ} = \text{د مم ه}$

اور $\text{ی} + \text{بَ} = \text{د مم ۲ ه}$

اور $\text{ی} = \text{د مم ۳ ه}$

$\therefore \text{اَ} = \text{د} \left(\text{مم ه} - \text{مم ۲ ه} \right)$

اور $\text{بَ} = \text{د} \left(\text{مم ۲ ه} - \text{مم ۳ ه} \right)$

$$\therefore \text{اَ} = \text{د} \left(\frac{\text{جم ه}}{\text{جب ه}} - \frac{\text{جم ۲ ه}}{\text{جب ۲ ه}} \right)$$

$$= \frac{\text{د جب} (\text{۲ ه} - \text{ه})}{\text{جب ه جب ۲ ه}} = \frac{\text{د}}{\text{جب ۲ ه}}$$

اور $\text{بَ} = \text{د} \left(\dfrac{\text{جم ۲ ه}}{\text{جب ۲ ه}} - \dfrac{\text{جم ۳ ه}}{\text{جب ۳ ه}} \right) =$

$$= \frac{\text{د جب} (\text{۳ ه} - \text{۲ ه})}{\text{جب ۲ ه جب ۳ ه}} =$$

$$= \frac{\text{د جب ه}}{\text{جب ۲ ه جب ۳ ه}} = \frac{\text{د}}{\text{جب ۲ ه} \left(\text{۳} - \text{۴ جب}^{\text{۲}} \text{ه} \right)}$$

اسی طرح $\text{جب ۲ ه} = \dfrac{\text{د}}{\text{اَ}}$

اور $\text{۳} - \text{۴ جب}^{\text{۲}} \text{ه} = \dfrac{\text{د}}{\text{بَ جب ۲ ه}} = \dfrac{\text{اَ}}{\text{بَ}}$

∴ ٣ - ٢ (١ - جم ٢ ه) = ا/ب

جم ٢ ه = ½ (ا/ب - ١)

اِسیطع د²/ا² + ¼ (ا/ب - ١)² = ١

اِسیطع د²/ا² = ١ - ¼ (ا/ب - ١)² = (٤ب² - (ا - ب)²) / ٤ب²

= (٣ب² + ٢اب - ا²) / ٤ب²

= (٣ب - ا)(ا + ب) / ٤ب²

∴ د = ا/٢ب √((ا + ب)(٣ب - ا))

اگر مس ه = ½ تب جب ٢ ه = ٢ مس ه / (١ + مس² ه)

= (٢/٢) / (¼ + ١) = ٣/٥ اور جب ٢ ه = د/ا

اِسیطع ٣/٥ = √((ا + ب)(٣ب - ا)) / ٢ب ∴

٣٦ب² = ٢٥ (ا + ب)(٣ب - ا) =

٢٥ (٣ب² + ٢اب - ا²)

∴ ٣٩ب² + ٥٠اب - ٢٥ا² = ٠

∴ (١٣ب - ٥ا)(٣ب + ٥ا) = ٠

∴ ۱۲ اب - ۵ اَ = ۰

س ۱۵

فرض کرو کہ مینار کی بلندی د گز ہے تو فاصلہ دست مینار کے پانون تک د مم ۵° ہی ہے اس سے کہ مینار ہمیشہ اسی زاویہ پر کھڑا ہے مشاہدہ کنندہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ مینار ہمیشہ ایک ہی زاویہ بناتا ہے اس لئے ضرور ایک ایسے دائیرہ کی قوس بنیگی جسکا مرکز مینار کے پاؤن مین ہے اور جبکہ مینار کی وضع شمال سے شمال مشرق کی طرف بدلتی ہے تو وہ محیط کے ⅛ حصہ کو ضرور طے کریگا +

اِسلئے $\frac{۲ \pi د مم ۵°}{۸} = ۱۰۰$

∴ $د = \frac{۴۰۰ مس ۱۵°}{\pi}$ ۹

س ۱۶

فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے چیز کو جو کہ سڑک سے دور ہے اور ب ظاہر کرتا ہے اُس چیز کو جو کہ سڑک کے پاس ہے + اور س وہ نقطہ ہے جہان کہ ا ب ۳۰° زاویہ بناتا ہے اور د دیکھنے کی جگہ کا دوسرا مقام ہے یہ جانا گیا ہے کہ نقطہ س ایسا ہے کہ نقطون ا اور ب اور س کے گرد جو دائیرہ کھینچا جا ئے تو س د کو نقطہ س پر مس کرے اقلیدس پر تو ہنٹر صاحب کے نوٹون کو صفحہ ۳۰۰ مین دیکھو +

∴ زاویہ ب س و برابر ہے زاویہ ب ا س اور اس کو ۵ سے تعبیر کرو

۵ سے ظاہر ہوتا ہے تو زاویہ ا ب س = ۵ + ب

اور نیز = π − ۵ − ا

∴ ۲۵ = π − ا − ب

اب $\frac{\text{س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (۵ + ب)}}$

∴ ب س = $\frac{\text{س جب ب}}{\text{جب (۵ + ب)}}$

اور $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ۵}}$

∴ ا ب = $\frac{\text{س جب ا جب ب}}{\text{جب ۵ + جب (۵ + ب)}}$ =

$\frac{\text{۲ س جب ا جب ب}}{\text{جم ب − جم (۲۵ + ب)}}$

= $\frac{\text{۲ س جب ا جب ب}}{\text{جم ب − جم (π − ا)}}$

= $\frac{\text{۲ س جب ا جب ب}}{\text{جم ب + جم ا}}$

مثال ۱

فرض کرو کہ ا قلعہ کو ظاہر کرتا ہے اور ب جہاز کے پہلے حالت کو اور س دوسری حالت کو بڑھاؤ ب س کو نقطہ س میں سے گذرتا ہوا کسی نقطہ ی تک تب زاویہ ا ب س = $\frac{1}{۲}$ ۶۲°

اور زاویہ ا س ی = $\frac{1}{۲}$ ۹۰°

∴ زاویہ ب ا س = ۵°۴۸

$$\frac{\text{اب}}{\text{بس}} = \frac{\text{جب اس ب}}{\text{جب ب اس}} = \frac{\text{جب}(180^\circ - 67\tfrac{1}{2}^\circ)}{\text{جب } 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$\therefore \text{اب} = 4\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{16+8\sqrt{2}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{اس}}{\text{بس}} = \frac{\text{جب اب س}}{\text{جب ب اس}} = \frac{\text{جب } 22\tfrac{1}{2}^\circ}{\text{جب } 45^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \div \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$\therefore \text{اس} = 4\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{16-8\sqrt{2}}$$

دیکھو مثال ۷ و ۱۸

مش ۱۸

فرض کرو کہ جہاز کی پہلی حالت ب ہے اور ا قریبی روشنی گھر اور ب دور کا روشنی گھر اور ق دوسری حالت جہاز کی ٭

تو زاویہ ب ق پ = ۴۵°

اور ا ق پ = ۲۲½°

∴ زاویہ ب س د برابر ہے زاویہ ب ا س اور اس کو ہ سے تعبیر کرو

ہ سے ظاہر ہوتا ہے تو زاویہ ا ب س = ہ + ب

اور نیز = π − ہ − ا

∴ ۲ ہ = π − ا − ب

اب ب س / س د = جب ب / جب (ہ + ب)

∴ ب س = س جب ب / جب (ہ + ب)

اور ا ب / ب س = جب ا / جب ہ

∴ ا ب = س جب ا جب ب / جب ہ جب (ہ + ب) =

۲ س جب ا جب ب / (جم ب − جم (۲ ہ + ب))

= ۲ س جب ا جب ب / (جم ب − جم (π − ا))

= ۲ س جب ا جب ب / (جم ب + جم ا)

مثال فرض کرو کہ ا قلعہ کو ظاہر کرتا ہے اور ب جہاز کے پہلے حالت کو اور س دوسری حالت کو بڑھاؤ ب س کو نقطہ س میں سے گذرتا ہوا کسی نقطہ ی تک تب زاویہ ا ب س = $\frac{1}{2}$

۶۲

اور زاویہ ا س ی = $\frac{1}{2}$ ۷°

∴ زاویہ ب ا س = ۵°

$$\frac{\text{اب}}{\text{بس}} = \frac{\text{جب اس ب}}{\text{جب ب اس}} = \frac{\text{جب}(۱۸۰^\circ - ۶۷\tfrac{۱}{۲}^\circ)}{\text{جب } ۴۵^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}} \div \frac{۱}{\sqrt{۲}} =$$

$$\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\therefore \text{اب} = ۴\sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۱۶+۸\sqrt{۲}}$$

اور $\frac{\text{اس}}{\text{بس}} = \frac{\text{جب اب س}}{\text{جب ب اس}} = \frac{\text{جب } ۲۲\tfrac{۱}{۲}^\circ}{\text{جب } ۴۵^\circ}$

$$= \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲} \div \frac{۱}{\sqrt{۲}} =$$

$$\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}}$$

$$\therefore \text{اس} = ۴\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}} = \sqrt{۱۶-۸\sqrt{۲}}$$

دیکھو مثال ۷ و ۱۸

مش ۱۸

فرض کرو کہ جہاز کی پہلی حالت ب ہے اور ا قریبی روشنی گھر اور ب دور کا روشنی گھر اور ق دوسری حالت جہاز کی ۔

تو زاویہ ب ق پ = ۴۵°

اور ا ق پ = ۲۲½°

∴ زاویہ ق ا پ = ۶۷½°

ب ق / ب ا = جیب ب ا ق / جیب ب ق ا

= جیب (۱۸۰° − ۶۷½°) / جیب ۲۲½° = جیب ۶۷½° / جیب ۲۲½° =

جم ۲۲½ / جیب ۲۲½° = مم ۲۲½° = √۲ + ۱

بموجب مثال ۷، ۱۸

∴ ب ق = ۸ {√۲ + ۱}

اور پ ق = ب ق جیب ۴۵° =

۸ (√۲ + ۱) / √۲ = ۸ + ۴ √۲

مثل ۱۹

فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے چوٹی روشن گھر کی اور پ مستول کی چوٹی جو کہ پہلے مشاہدہ مین معلوم ہوتے تھے اور س مرکز زمین کا ایک خط کھینچو پ سے اتک اور زمین کو ب پر مس کرے اور فرض کرو کہ ر زمین کا نصف قطر فٹون مین ہے تو پ ب =

√((پ س)² − (ب س)²)

= √((ر + ۹۶)² − ر²) = √(۲ ر × ۹۶ + (۹۶)²)

= √۱ر۱ × ۹۴ بہت قریباً کیونکہ ر کا (۹۴ ر)٢ کے ساتھ بہت ہی مقابلہ کیا گیا ہے +

ٹھیک اسی طریقہ مین اگر ق جہاز کے تختہ کو دوسرے مشاہدہ مین ظاہر کرے تو

ق ب = √۲ر۱ × ۱۶ اب چونکہ پ س ب

ایک بہت چھوٹا زاویہ ہے تو ہم اس سبب سے کہ مس ہ بہت ہی قریب ہ کے برابر ہے جبکہ ہ بہت چھوٹا ہے خط مستقیم پ ب کو اس قوس کے برابر خیال کرتے ہین جو کہ پہلے مشاہدہ مین ب سے جہاز کے فاصلہ کو اندازہ کرتی ہے اور ایسا ہی ہم خیال کرتے ہین ق ب کو وس قوس کے برابر جو کہ دوسری مشاہدہ مین ب سے جہاز کے فاصلہ کو اندازہ کرتی ہے +

اسیطرح دونون مشاہدون کے درمیان جہاز اوپر چل گیا ہے +

√۲ر۱ × ۹۴ − √۲ر۱ × ۱۶

یعنی ۴ √۲ر یعنی آدھے گھنٹہ مین وہ چل چکا ہے

۴ √۵۲۸۰ × ۸۰۰۰ فیٹ

بنسبت ۸ √۵۲۸۰ × ۸۰۰۰ فیٹ ایک گھنٹہ کے واسطے +

یعنے ۸ $\frac{۸۰۰۰ \times ۵۲۸۰}{۵۲۸۰}$ میل فی گھنٹہ

یعنے ۸ $\frac{۸۰۰}{۵۲۸}$ میل فی گھنٹہ

یعنے ۸ $\frac{۵۰}{۳۳}$ میل فی گھنٹہ

یہ بہت قریباً ۸ $\frac{۳}{۲}$ میل فی گھنٹہ ہے

س ۲۰

فرض کرو کہ ا ظاہر کرتا ہے پہاڑ کی چوٹی کو اور ب قاعدہ کو اور ب س راستہ کے پہلے حصہ کو اور س ا رستہ کے دوسرے حصہ کو

ا سے ا ی ایک عمود افقی سطح پر کھینچو جو کہ ب کو شامل ہے اور مفصلہ ذیل زاوئے ہین +

$ب ا ی = \frac{\pi}{2} - سِ$

$س ب ی = اِ$

$س ا ی = \frac{\pi}{2} - بِ$

$\therefore ب ا س = بِ - سِ$

$ا ب س = سِ - اِ$

$ا س ب = \pi + اِ - بِ$

$ا ب = \frac{ا ی}{جب سِ} = \frac{ن}{جب سِ}$

$$\frac{\text{ب س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ب ا س}}{\text{جب ا س ب}} = \frac{\text{جب (ب - س)}}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ا ب س}}{\text{جب ا س ب}} = \frac{\text{جب (س - ا)}}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$\therefore \frac{\text{ب س + ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب (ب - س) + جب (س - ا)}}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$= \frac{\text{٢ جب } \frac{\text{ب - ا}}{\text{٢}} \text{ جم } \left(\frac{\text{ا + ب}}{\text{٢}} - \text{س}\right)}{\text{جب (ب - ا)}}$$

$$= \frac{\text{جم } \left(\frac{\text{ا + ب}}{\text{٢}} - \text{س}\right)}{\text{جم } \frac{\text{ب - ا}}{\text{٢}}}$$

$$\therefore \text{ب س + ا س} = \frac{\text{ن}}{\text{جب ن}} \times \frac{\text{جم } \left(\frac{\text{ا + ب}}{\text{٢}} - \text{س}\right)}{\text{جم } \frac{\text{ب - ا}}{\text{٢}}}$$

س ١٢

فرض کرو کہ د چیز کے پاؤں کو ظاہر کرتا ہے اور ا ب س کو
مشاہدہ کے تین مقاموں کو ظاہر کرتے ہیں اور د ظاہر
کرتا ہے چیز کی بلندی کو۔ تو د ا

= د مم ا اور د ب = د مم ب

اور د س = د مم س

ہم مثلث ا د س سے رکھتے ہیں $\text{د}^{\text{٢}} \text{ مم}^{\text{٢}} \text{ ا} = \text{د}^{\text{٢}} \text{ مم}^{\text{٢}} \text{ س}$

+ اِ۲ - ۲ اِ د مم سِ جم اِ سِ د

اور مثلث ب د س سے رہکتے ہین د۲ مم ب =

د۲ مم سِ + بِ۲ - ۲ ب د مم سِ جم ب س د

پہلی مساوات کو ب سے ضرب دو اور دوسرے کو ا سے

اور جمع کرو

اسیطرح د۲ (ب مم۲ اِ + ا مم۲ بِ) =

= اَبَ (اَ + بَ) + د۲ (اَ + بَ) مم۲ س

اَبَ (اَ + ب) جب۲ اِ جب۲ بِ جب۲ سِ

∴ د۲ = ا (جم۲ بِ جب۲ سِ - جم۲ سِ جب۲ بِ) جب۲ اِ + ب (جم۲ اِ جب۲ سِ جم۲ سِ جب۲ اِ)

اَبَ (اَ + بَ) جب۲ اِ جب۲ بِ جب۲ سِ ÷

ا (جب۲ سِ - جب۲ بِ) جب۲ اِ + ب (جب۲ سِ جب۲ اِ) جب۲ ب

س ۲۲ فرض کرو کہ نیچے پہاڑی کے چوٹی پ ہے اور اونچی پہاڑی کے چوٹی ق اور فرض کرو کہ ا مشاہدہ کی پہلی جگہہ کو ظاہر کرتا ہے اور ب دوسری کو اور س تیسری کو اور پ اور ق سے پ م اور ق ن کھینچو جو کہ جدا گانہ اس افقی سطح پر جو کہ ا اور ب اور س کو شامل ہے عمود ہون +

فرض کرو کہ پ م = ح اور ق ن = ع تو ا م = ح مم اِ اور

ا م = ا ب + ب س + س م =

س + ۱ + ح مم ب

∴ ح مم اِ = س + ۱ + ح مم ب

∴ ح (مم اِ − مم بِ)

= س + ۱

$$∴ ح = \frac{(س + ۱) \text{ جب اِ جب ب}}{\text{جب (بِ − اِ)}}$$

اور متشابہ مثلثوں کی مدد سے $\frac{ح}{ح} = \frac{ق ن}{پ م} = \frac{ب ن}{ب م}$

$$= \frac{ا ن − ا ب}{ا م − ا ب} = \frac{ح مم اِ − س}{ح مم ا − س}$$

اسطرح چونکہ ہمکو ح معلوم ہوگیا ہے ہم ح کو معلوم کر سکتے ہیں +

س ۲۲ فرض کرو کہ ح فیٹ مینار کے ارتفاع کو ظاہر کرتا ہے اور اَ سورج کے سایہ کو دوپہر کے وقت اور فاصلہ مینار کے تلا و خندق کے کنارہ کے درمیان ح مم ۶۰ ہے اس لئے مینار کے تہ اور سایہ کے نیچے کے درمیان

فاصلہ ح مم ۶۰° + ۵۴ دوپہر کے وقت ہے

ح مم ۶۰° + ۱۲۰ اس وقت ہے جبکہ سورج ٹھیک مغرب

کی طرف ہی سایہ کی سمتین زاویہ قایمہ پیدا کرتے ہین اسلیے

(ح مم ۶۰° + ۵۴)^۲ + (ح مم ۶۰° + ۱۲۰)^۲

= (۳۷۵)^۲

∴ ح^۲/۳ + ۲ح/√۳ × ۱۶۵ + (۴۵)^۲ +

(۱۲۰)^۲ = (۳۷۵)^۲

∴ ۲ح^۲/۳ + ۱۶۵ ۲ح/√۳ = ۱۲۴۲۰۰

اس مساوات درجہ دوم کو عام طرح حل کرنے سے ح

= ۱۸۰ √۳

یا − ۳۴۵ √۳ ان دو قیمتون مین سے صرف مثبت قیمت

کارآمد ہے ∴ ح مم ا − ح مم ۶۰° = ۴۵

∴ مم ا = مم ۶۰° + ۴۵/ح = ۱/√۳ + ۴۵/(۱۸۰√۳) = ۱/√۳ + ۱/(۴√۳)

= ۵/(۴√۳)

∴ مس ا = ۴√۳/۵

س ۴۲

فرض کرو کہ پ ظاہر کرتا ہے مینار کی چوٹی کو تو ت زاویہ ہے

درمیان پ ا اور س ا کے جو کہ ح مین سے گذرتا ہے

اسیطرح زاویہ س پ ا = ت - ا اور زاویہ

و پ س = ا - ب

تب $\frac{\text{و س}}{\text{س پ}} = \frac{\text{جب و پ س}}{\text{جب س و پ}} = \frac{\text{جب (ا - ب)}}{\text{جب ب}}$

اور $\frac{\text{س ا}}{\text{س پ}} = \frac{\text{جب س پ ا}}{\text{جب س ا پ}} = \frac{\text{جب (پ - ا)}}{\text{(ت - پ)}} = \frac{\text{جب (پ - ا)}}{\text{جب پ}}$

$\therefore \frac{\text{جب (ا - ب)}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{جب (پ - ا)}}{\text{جب پ}}$

$\therefore$ جب ا مم ب - مم ا = جم ا - جب ا مم پ

$\therefore$ مم پ = ۲ مم ا - مم ب

اب فرض کرو کہ ا اور ب اور پ مقابل ہین ان مشاہدون کے

مقاموں کے جوکہ ایک اور خط مستقیم ا س و مین ہین

تو مم پَ = ۲ مم اَ - مم بَ

لیکن بموجب فرض کرنے ۲ مس بَ = مس اَ

$\therefore$ مم پَ = ۰

$\therefore$ پَ = $\frac{\text{ت}}{۲}$

اسطرح سے اَسَ وَ زاویہ قایمہ بناتا ہے اب کے ساتھ

∴ ا سَ وَ افقی خط مستقیم ہے

وسے دم عمود ا وَ پہ کہنچو۔

اور مَ سے م ن اس افقی سطح پر جو کہ د کو شامل ہے عمود کہینچو اور پَ ا کو ا ین سے گذرتی ہوے یہانتک

بڑہاو کہ اسی سطح سے نقطہ ق پر ملے

تو جب ہ = م ن/م و جب سِ = و م/د و اور

جم پ = ق/ا و = م ن/ا و

∴ جم پ = جب ہ جب سِ

جب ب = پ/و جب ا =

س ۲۵

سہانتہ/۲ جب ا = ماتتہ جب ا

اسیطرح اگر ا = π/۲ تو ہم رکہتے ہین جب ب = ماتتہ × ا

∴ پ = π/۳ یا ۲π/۳

تسیر فرض کرو کہ ا = π/۲ ± ع جہانکہ ع

π/۲ کے محیط کا اندازہ ہے

تو جب ب = ماتتہ جب (π/۲ ± ع)

= ماتتہ {جب π/۲ ± ع جم π/۲} نہایت قریباً

فرض کرو کہ ب = $\frac{\pi}{3}$ + ک

اور قریباً جب $\frac{\pi}{3}$ + ک جم $\frac{\pi}{3}$ =

$\sqrt{3}$ {جب $\frac{\pi}{9}$ + ح جم $\frac{\pi}{9}$}

∴ ک جم $\frac{\pi}{3}$ = ح $\sqrt{3}$ جم $\frac{\pi}{9}$

∴ ک = ح $\sqrt{3}$. مم $\frac{\pi}{2}$ = ٣ ح

اس طریقے سے اگر ب = $\frac{2\pi}{3}$ + ک

تو ہم معلوم کرتے ہین کہ ک = -٣ ح - اس طرح قریباً

غلطی ب مین ٩ سیکنڈ ہے

مشق ٢٦

فرض کرو کہ ا اور ب دو چیزین دریا کے مقابل کے کنارہ پر واقع ہین اور فرض کرو کہ پ اور ق اس کنارہ پر دو نشان ہین جب ایسا ہے تو پ ق = ا پ اور فرض کرو کہ پ ا کے مقابل ہے اور ق ب کے اس لئے ا پ ب ق کی متوازی اور مساوی ہے اور فرض کرو کہ ا ق اور ب پ باہم نقطہ س پر تقاطع کرتے ہین تو ا = زاویہ ا پ ب اور ب = زاویہ ا ق ب = زاویہ پ ا ق

∴ $\frac{\text{ب س}}{\text{ب ا}} = \frac{\text{جب ب}}{\text{جب (ا + ب)}}$

$\frac{\text{ا س}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب (ا + ب)}}$

لیکن (پ ق)^۲ = (پ س)^۲ + (ق س)^۲ =

- ۲ پ س ءق س. جم پ س ق اور ق س = ا س

∴ س^۲ = (پ ا)^۲ (جب^۲ ب + جب^۲ ا - ۲ جب ا جب ب جم (ا + ب)) / (جب^۲ (ا + ب))

فرض کرو کہ د ظاہر کرتا ہے چوڑائی دریا کی اس لئے مثلث

ا پ ب کا رقبہ

= ½ د س اور یہہ رقبہ = ½ پ ا ×

پ ب جب ا پ ب = پ ا. پ س جب ا

= (پ ا^۲ جب ا جب ب) / (جب (ا + ب)) = (س^۲ جب ا جب ب جب (ا + ب)) / (جب^۲ ب + جب^۲ ا - ۲ جب ا جب ب جم (ا + ب))

س ۲۷

فرض کرو کہ ا ب ظاہر کرتا ہے قلعہ کے ایک ضلع کو اور س ایک

مقام ٹھیک ا کے جنوب کی جگہہ ہے اور د دوسرے مقام کو

∴ س د = ا

اور زاویہ ا س د = ۹۰°

اور ا اور ب اور س اور د دایرہ کے محیط پر واقع ہونگے

فرض کرو کہ ی تیسری جگہہ ہے

پس ی س د پر واقع ہے جو کہ

د مین سے بڑہایا گیا ہے اور د ی = ب

اور زاویہ ب ی د ایک قائمہ ہے

فرض کرو کہ پ زاویہ ہے درمیان ا ب کے جو کہ د ین سے گذرتا ہے

اور س ی کے جو کہ ی ین سے گذرتا ہے تب ا + ب = ا ب جم ب

∴ ا ب = (ا + ب) قع پ

اور ب ی = ی س مس ب س ی

اور = ی د مس ب د ی

∴ (ا + ب) مس (۹۰ - ا) = ب مس ب ا س

= ب مس (۹۰ - پ) اقلیدس ۱۱ ش ۲۲

ش ۲۸

ا سے ا م اس افقے سطح پر عمود ڈالو جو کہ سڑک کو شامل ہے اور ا ن سیدہی سڑک پر کھینچو

∴ جب ا = ا م / ا ب

اور جب ب = ا ن / ا ب

ایسا ہی اَ سے اَ مَ خط عمود افقی سطح پر کھینچو اور اَ نَ سیدہی سڑک پر

تو جب اَ = اَ مَ / اَ بَ

اور جب ب = $\frac{ا ن}{ا ب}$

اِسیطرح یہہ ظاہر کرتے ہین کہ $\frac{ا م}{ا ب} \times \frac{ا ن}{ا ب} = \frac{ا م}{ا ب} \cdot \frac{ا ن}{ا ب}$

یا کہ ا م . ا ن = ا م × ا ن یا یہہ کہ $\frac{ا م}{ا ن} = \frac{ا م}{ا ن}$

اب اگر ا ٹہیک ا سے سٹرک کے کسی نقطہ پر پوشیدہ ہے

ا ا خط مستقیم اگر بٹر کر ا مین سے گذرے تو سٹرک کو تقاطع

کریگا اور تب ا ا اور سٹرک سطح پر واقع ہونگے افقی سطح

کے ساتہہ اس سطح کے میلانکا جب ظاہر کیا گیا ہے $\frac{ا م}{ا ن}$

سے اور نیز $\frac{ا م}{ا ن}$ سے پس یہہ برابر ہین +

س ۲۹

اس جگہہ دو حالتین ہین - فرض کرو کہ ا پ ق اور ب پ ر

جداگانہ ا پ اور ب پ کی ایک ہی اطراف مین ہین تو زاویہ

ق پ ر = زاویہ ا پ ب = ا +

فرض کرو کہ زاویہ ا پ ق اور ب پ ر جداگانہ ا پ اور

ب پ کے ایک ہی طرف ہین تو زاویہ ر ب ق = π - ا -

دونون حالتون مین ا ب = ر ق کیونکہ اس دایرہ کا نصف

قطر جو کہ پانچ نقطون ا اور ب اور پ ق اور ر کے گرد جاتا ہے

= $\frac{ا ب}{جب ا ب پ}$

اور نیز = ر ق ⁄ جب ر پ ق

پہلے حالت مین ا ب = √(ا² + ب² − ۲ ا ب جم ا)

دوسری حالت مین ا ب = √(ا² + ب² + ۲ ا ب جم ا)

س ۳

فرض کرو کہ دونو خط و س زاویہ ا س ب کے اندر گذرتے ہین اور فرض کرو کہ ا س = ا اور ا س و = پ تو ہم مثلثون ا س و اور ب س و سے ہم پاتے ہین

و س = ا جب (پ + ا) ⁄ جب ا اور و س = ا جم (پ − ب) ⁄ جب ب

∴ و س جب ا = ا (جب پ جم ا + جم پ جب ا)

و س جب ب = ا (جم پ جم ب + جب پ جب ب)

∴ ا جب ب = و س جب ا (جم پ − جب ب) ⁄ جم (ا + س)

مجذور کرو اور جمع کرو اس طرح سے

ا² جم² (ا + ب) = و س² { جب² ا (جم ب جب ب) + جب² ب (جم ا − جب ا) }

= و س² { جب² ا + جب² ب − ۲ جب ا جب ب جب (ا + ب) }

اس طرح سے و س² = ا² جم² (ا + ب) ⁄ (جب² ا + جب² ب − ۲ جب ا جب ب جب (ا + ب))

ایک ایسی ہی مثال و س² کے واسطے ا اور ب کے اصطلاحون

مین پائے جاویگی تب وَسَ^۲ = وسَ^۲ + وَا^۲ ـ اس سے
اَ معلوم ہوجاتا ہے اور تب اَب = اَ ما ہ ایسا ہے
سوال خطوط وس اور وَسَ کے کسی اور حالت کے واسطے
حل کیا جائیگا +

س ۱۳
فرض کروکہ اَ ظاہر کرتا ہے سورج کا ارتفاع تومس اَ =
$\frac{۱۵۰}{۷۵} = ۲$
∴ ل مس اَ = ۱۰ + لوگ ۲

۱۰٫۳۰۱۰۳۰۰ ‏ ۱۰٫۳۰۱۳۱۵۳ ‏ ۱۰٫۳۰۱۰۳۰۰ ∴
‏ ۱۰٫۳۰۰۹۹۹۴ ‏ ۱۰٫۳۰۰۹۹۹۴

‏ ۰٫۰۰۰۳۰۶ ‏ ۰٫۰۰۰۳۱۵۹

۰۰۰۳۱۵۹ ٫ : ۰۰۰۰۳۰۶ ٫ :: ۶۰″ : وَ
∴ و = ۶۰ ٫ اَ = ۶۳° ۲۶′ ۶″

س ۳۲
دفعہ ۱۹۳ کے شکل لو
یہان پ ب س = ۵°
اور پ اَ س = ۸°
اور اَب = ۳۰۰ فیٹ

$\frac{پ ب}{ب اَ} = \frac{جب پ اَ ب}{جب اَ پ ب} = \frac{جب ۸°}{جب ۳°}$

∴ پ ب = ۳۰ جب ۸۰ ٰ ۴ جب د ۳ ٰ / جب ۲ ٰ

ب س = ب پ جم پ ب س =

ب پ جم ۵ ٰ ۵ = ب پ جب ۵ ۳ ٰ

= ۳۰ جب ۸۰ ٰ ۴ جب ۳۵ / جب ۲ ٰ

لوگ ب س = لوگ ۳۰ + ل جب ۸۰ ٰ ۴ – ۱۰ +

ل جب ۳۵ – ۱۰ – (ل جب ۲ ٰ – ۱۰)

= ۱٫۴۷۷۱۲ + ۹٫۹۸۷۱۰۷ + ۹٫۷۵۸۵۹

= ۹٫۰۸۵۸۹ – ۱۰ = ۲٫۰۲۰۸۹

∴ ب س = ۱۰۴٫۹۳

س ۳۴ ا ظاہر کرتا ہے میلان کو تو جب ا = ۱/۱۹۶ = ۱۰۰/۴۹×۴

∴ ل جب ا = ۱۰ + لوگ ۱۰۰ – لوگ (۴ × ۴۹)

= ۱۲ – ۲ لوگ ۲ – ۲ لوگ ۷ = ۹٫۷۰۷۷۴

۹٫۷۵۷۸۲	۹٫۷۰۷۷۴
۹٫۷۵۷۶۱	۹٫۷۰۷۶۱
٫۰۰۰۲۱	٫۰۰۰۱۳

٫۰۰۰۲۱ : ٫۰۰۰۱۳ :: ۶۰ : ۳

∴ و = ۳٫۷

∴ ا = ۳۰° ۵۴′، ۳″

س ۴۳ فرض کرو کہ ڈ ٹیلونکا نقطہ تقاطع ہے اور ب چھوٹے پر مشاہدہ کا مقام ہے اور پ چیز کی چوٹی اور س تہ پ ب کو ب مین سے یہانتک بڑھاؤ کہ اس افقی خط سے جو کہ ڈ کو شامل ہے نقطہ د پر ملے اور دا کو ا مین سے کسی نقطہ ی تک بڑھاؤ تب ڈ ب = ۴۰ فیٹ اور مفصلہ ذیل معلوم زاویہ ہین +

س ا ی = ۶۰°

ب ا د = ۴۰° ب د ا = ۰، ب پ س = ۹۰° − ۶۰° = ۳۰°

∴ ب ا س = ۸۰° اور ب س ا = ۲۰°

پ ب س = ۳۰°

$$\frac{\text{پ س}}{\text{ب ڈ}} = \frac{\text{جب ب ڈ س}}{\text{جب ب س ڈ}} = \frac{\text{جب ۸۰°}}{\text{جب ۲۰°}}$$

$$\frac{\text{پ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{جب ب پ س}}{\text{جب ب پ س}} = \frac{\text{جب ۳۰°}}{\text{جب ۲۰°}}$$

$$\therefore \frac{\text{پ س}}{\text{ب ڈ}} = \frac{\text{جب ۸۰° جب ۳۰°}}{\text{جب}^2\ \text{۲۰°}}$$

$$\therefore \text{پ س} = \frac{\text{۴۰ جب ۸۰ جب ۳۰°}}{\text{جب}^2\ \text{۲۰°}}$$

= $\frac{\text{۶۴ جب ۸۰° جم ۸۰°}}{\text{جب}^2 \text{ ۵۰°}}$ = $\frac{\text{۱۲۸ جم ۸۰°}}{\text{مس ۵۰°}}$

∴ لوگ پ س = ۷ لوگ ۲ + ل جم ۸۰° - ل مس ۵۰°

= ۱۸۹۸۱۰۳ ۳۴ ۲ ۱

∴ پ س = ۱ ۳ ۰ ۰ ۴ ۲ ۶ ۹ ۱ ۲

س ۳۵

فرض کرو کہ ا، ب، س جہاز کے ایسے تین مقام ہین کہ جیسے مشاہدے کئے گئے ہین اور فرض کرو کہ پ اور ق اور ر اور جہاز کے مقابل کے مقام ہین +

تو خط مستقیم ا س خط مستقیم پ ق ر کے متوازی ہے نیز

ا ب = ب س و پ ق = ق ر

فرض کرو کہ شمال کی سمت اور جہاز کے چلنے کی سمت کا درمیان کا زاویہ ۵ ہے

نقطہ ب سے ایک ایسا خط مستقیم ا پ کا متوازی کہینچو جو کہ پ ق سے نقطہ م پر ملے تو

تو $\frac{\text{ق م}}{\text{ب م}}$ = $\frac{\text{جب ق ب م}}{\text{جب ب ق م}}$ = $\frac{\text{جب ق م ا}}{\text{جب ب ق پ}}$ = $\frac{\text{جب (ب + ۱)}}{\text{جب (۵ - ۲)}}$

پہر نقطہ س سے ایک ایسا خط مستقیم ا پ کا متوازی کہینچو جو کہ ق ر کو

نقطہ ن پر ملے تب

$$\frac{\text{ر ن}}{\text{س ن}} = \frac{\text{جب رس ن}}{\text{جب س ر پ}} = \frac{\text{جب (س - ا)}}{\text{جب (ہ - س)}}$$

لیکن ب ام = س ن اور رن = ۲ ق م کیونکہ رن تو دو گھنٹے کے عرصہ مین جہاز کے دو نور استون کا فرق ہے اور ق م ایک گھنٹہ مین فرق ہے

$$\therefore \frac{\text{۲ جب (ب - ا)}}{\text{جب (و - ب)}} = \frac{\text{جب (س - ا)}}{\text{جب (ہ - س)}}$$

∴ ۲ جب (ہ - س) جب (ب - ا) = جب (س - ا) جب (ہ - ب) ∴ ۲ (جب ہ جم س - جم ہ جب س) جب (ب - ا)

= (جب ہ جم ب - جم ہ جب ب) جب (س - ا)

اس کو جم ہ پر تقسیم کرو اسطرحسے ہم مس ہ کی قیمت حاصل کرلینگے +

س ۳۶ اگر ا + ب + س = ہ تو و + ی = ہ ∴ جب و = جب ی ∴ مس پ = ۱

ہم دفعہ ۱۵۵ کی مانند کہہ سکتے ہین $\frac{\text{جب و - جب ی}}{\text{جب و + جب ی}}$ = مس (پ - $\frac{\pi}{۴}$)

یعنے $\frac{\text{۲ جب } \frac{\text{و - ی}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{و + ی}}{۲}}{\text{۲ جب } \frac{\text{و + ی}}{۲} \text{ جم } \frac{\text{و - ی}}{۲}}$ = مس (پ - $\frac{\pi}{۴}$) اس سے کم کسر کے

لیکن جبکہ اب جم $\frac{\text{و + ی}}{۲}$ صفر ہے تو ہم دونو شمار کنندہ اور مخرج کو تقسیم نہین کر سکتے اور اسطرح سے ہم آگے نہین بڑھ سکتے فی الحقیقت اس حالت مین ایک دائیرہ نقاط پ اور ا ∴ رس اور ب کے گرد ہوگا اور پ اس قوس کا کوئی ایک نقطہ ہوگا جو کہ ا اور ب کے درمیان واقع ہے + تمت تمام شد +